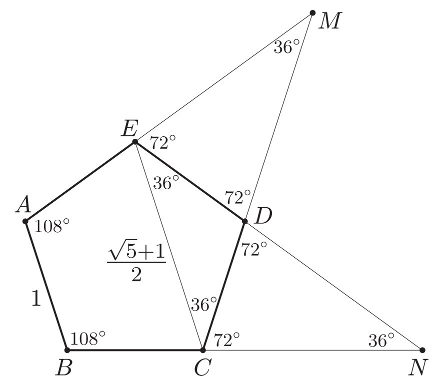
Megoldás. Megmutatjuk, hogy a válasz mindkét esetben igen. Belátjuk, hogy bármely szabályos ötszög alapú egyenes gúlához létezik olyan sík, amely a gúlát olyan hatszögben metszi, mely tengelyesen is és középpontosan is szimmetrikus.

Legyen a gúla alapja az egységnyi oldalú $ABCDE$ szabályos ötszög, hatodik csúcsa pedig F. Tudjuk, hogy a szabályos ötszög minden szöge $108°$, átlóinak hossza pedig az oldalak hosszának $\left(\sqrt{5}+1\right)/2$-szerese. Legyen az AE és CD egyenesek metszéspontja M, a BC és ED egyenesek metszéspontja pedig N (*1. ábra*). Ekkor $DEM\sphericalangle = EDM\sphericalangle = 180° - 108° = 72°$. Tehát

$$EMD\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 72° = 36° = \\ = \frac{180° - 108°}{2} = ECD\sphericalangle,$$

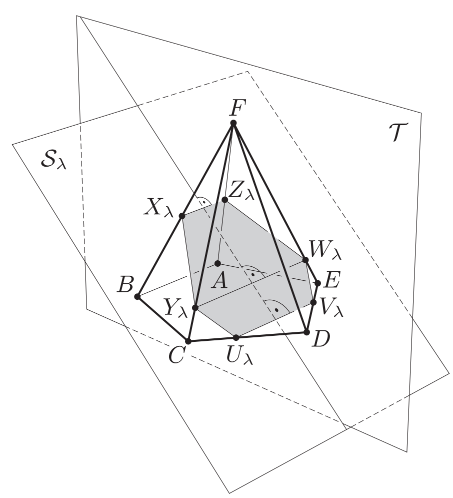
ezért a CEM háromszög egyenlőszárú, s így $EM = EC = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$. Az ötszög szimmetriája miatt ebből $CN = DN = DM = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$ is következik.



1. ábra

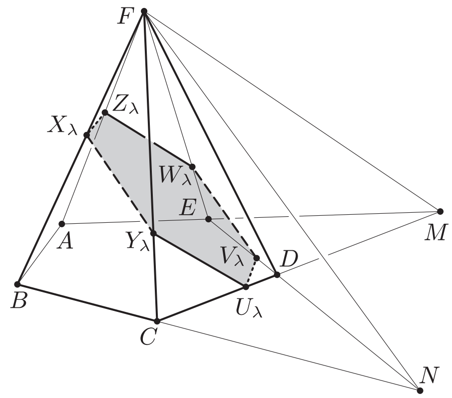
Az AB szakasz $\mathcal{T}$ felezőmerőleges síkja tartalmazza D-t és F-et, C és E, illetve N és M pedig egymásnak $\mathcal{T}$-re vonatkozó tükörképei.

Legyen $0 \le \lambda \le 1$ valós szám, U_λ, illetve V_λ a CD, illetve az ED szakasznak az a pontja, melyre $CU_\lambda = \lambda = EV_\lambda$. Ekkor U_λ és V_λ is egymásnak $\mathcal{T}$-re vonatkozó tükörképei. Legyen $\mathcal{S}_\lambda$ az $U_\lambda V_\lambda$ egyenest tartalmazó, az FNM síkkal párhuzamos sík. Mivel $U_\lambda V_\lambda$ merőleges $\mathcal{T}$-re, ezért $\mathcal{S}_\lambda$ is merőleges $\mathcal{T}$-re. Legyen $\mathcal{S}_\lambda$ és a gúla FE, FA, FB és FC éleinek metszéspontja rendre W_λ, Z_λ, X_λ és Y_λ (*2. ábra*). Ekkor W_λ és Y_λ, valamint Z_λ és X_λ is egymásnak $\mathcal{T}$-re vonatkozó tükörképei, tehát az $U_\lambda V_\lambda W_\lambda Z_\lambda X_\lambda Y_\lambda$ hatszög szimmetrikus $\mathcal{T}$-re, s ezért tengelyesen is szimmetrikus a $\mathcal{T} \cap \mathcal{S}_\lambda$ egyenesre. Vagyis az $\mathcal{S}_\lambda$ sík minden $0 < \lambda < 1$ esetén tengelyesen szimmetrikus hatszögben metszi a gúlát.



2. ábra

Megmutatjuk, hogy van olyan λ érték, melyre a metszet középpontosan is szimmetrikus. Tudjuk, hogy három sík páronkénti metszésvonalai vagy egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak. (Ennek az állításnak a bizonyítása megtalálható pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye I*, 1703. feladat.) Tekintsük az FBC, FDE és $\mathcal{S}_\lambda$ síkokat. Ezek páronkénti metszésvonalai $BC \cap ED = N$ miatt FN, továbbá $X_\lambda Y_\lambda$ és $V_\lambda W_\lambda$. E három egyenesnek nem lehet közös pontja, mert FN párhuzamos a másik két egyenest tartalmazó $\mathcal{S}_\lambda$ síkkal. Tehát az $X_\lambda Y_\lambda$ és $V_\lambda W_\lambda$ egyenesek párhuzamosak. Ugyanígy kapjuk az FCD, FEA és $\mathcal{S}_\lambda$ síkok páronkénti metszésvonalainak vizsgálatából, hogy az FM, $W_\lambda Z_\lambda$ és $Y_\lambda U_\lambda$ egyenesek is párhuzamosak (*3. ábra*).



3. ábra

Ha $\lambda = 0$, akkor $V_0 \equiv W_0 \equiv E$, a hatszög egy négyszöggé fajul. Mivel W_0Z_0 párhuzamos FM-mel, ezért a párhuzamos szelők tétele szerint

$$\frac{W_0Z_0}{MF} = \frac{EA}{MA}, \quad \text{azaz} \quad W_0Z_0 = \frac{EA}{MA} \cdot MF = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}} MF = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} MF.$$

Ha $\lambda = 1$, akkor $U_1 \equiv V_1 \equiv D$, a hatszög egy ötszöggé fajul. Mivel $V_1W_1 = DW_1$ párhuzamos FN-mel, ezért a párhuzamos szelők tétele, valamint a szabályos ötszög szimmetriája miatt

$$\frac{DW_1}{NF} = \frac{DE}{NE} = \frac{EA}{MA}, \quad \text{azaz} \quad DW_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} NF = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} MF.$$

Tehát az FEA és az FDE háromszögek egybevágósága miatt kapjuk, hogy $FZ_0 = FW_1$. Ezért a Z_0 és W_1 pontok az FAE egyenlőszárú háromszög szárain szimmetrikusan helyezkednek el. Legyen $Z_0EA\sphericalangle = W_1AE\sphericalangle = \alpha$. Viszont Z_1W_1 párhuzamos FM-mel, s így Z_0E-vel is, ha tehát $Z_1W_1 \cap AM = P$, akkor $Z_1PA\sphericalangle = \alpha$. Ha $FAW_1\sphericalangle = \beta$, akkor felhasználva, hogy $Z_1W_1A\sphericalangle = 2\alpha$ (mert a W_1AP háromszög külső szöge), valamint azt, hogy $90^\circ > FAE\sphericalangle = \alpha + \beta$, kapjuk, hogy

$$AZ_1W_1\sphericalangle = 180^\circ - \beta - 2\alpha > \beta = Z_1AW_1\sphericalangle.$$

Mivel bármely háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van, ezért ebből az következik, hogy $W_1Z_1 < AW_1$, vagyis $AW_1 = EZ_0 = W_0Z_0 = V_1W_1$ miatt $W_1Z_1 < V_1W_1$.

Azt már láttuk, hogy $0 = V_0W_0 < V_1W_1 = W_0Z_0$. Ha λ folytonosan nő 0-tól 1-ig, akkor a párhuzamos szelők tétele miatt $V_\lambda W_\lambda = \lambda \cdot V_1W_1$ is folytonosan nő 0-tól V_1W_1-ig, $W_\lambda Z_\lambda$ pedig folytonosan csökken W_0Z_0-tól W_1Z_1-ig. Mivel $W_1Z_1 < V_1W_1$, ezért lesz egy olyan λ érték, melyre $V_\lambda W_\lambda = W_\lambda Z_\lambda$ teljesül. (A párhuzamos szelők tételének többszöri alkalmazásával kiszámolható, hogy $\lambda = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$ esetén lesz egyenlőség, lásd a megoldás utáni *Megjegyzést.*)

Ha $V_\lambda W_\lambda = W_\lambda Z_\lambda$, akkor a hatszög tengelyes szimmetriájából következő $V_\lambda W_\lambda = Y_\lambda U_\lambda$ és $W_\lambda Z_\lambda = X_\lambda Y_\lambda$ egyenlőségek miatt miatt azt kapjuk, hogy a hatszög két-két szemközti oldalpárja, $V_\lambda W_\lambda$ és $X_\lambda Y_\lambda$, valamint $Y_\lambda U_\lambda$ és $W_\lambda Z_\lambda$ nemcsak párhuzamos, hanem egyenlő hosszú is. Ez azt jelenti, hogy a $V_\lambda W_\lambda X_\lambda Y_\lambda$ és az $Y_\lambda U_\lambda W_\lambda Z_\lambda$ négyszögek paralelogrammák. Ezért átlóik felezik egymást. Vagyis ha a $W_\lambda Y_\lambda$ szakasz felezőpontja O, akkor a $V_\lambda X_\lambda$ és $U_\lambda Z_\lambda$ szakaszok felezőpontja is O. Ez pedig azt jelenti, hogy az $U_\lambda V_\lambda W_\lambda Z_\lambda X_\lambda Y_\lambda$ hatszög az O pontra nézve középpontosan szimmetrikus.

Ezzel állításunkat beláttuk.

Megjegyzés. λ pontos értékét a *4. ábra* jelöléseit használva számoljuk ki. Legyen az $\mathcal{S}_\lambda$ sík és az AM egyenes döféspontja Q, jelöljük az EQ távolságot x-szel. Ekkor egyrészt

$$W_\lambda Z_\lambda = QZ_\lambda - QW_\lambda = \frac{AQ}{AM} \cdot MF - \frac{EQ}{EM} \cdot MF$$
$$= \left(\frac{1+x}{\frac{\sqrt{5}+3}{2}} - \frac{x}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \right) MF = \frac{3 - \sqrt{5} + (4 - 2\sqrt{5})x}{2} MF.$$

Másrészt az EC-vel párhuzamos $U_\lambda V_\lambda$ egyenes is átmegy Q-n, ezért $EV_\lambda Q\sphericalangle = 36^\circ$, tehát az $EV_\lambda Q$ és EMD háromszögek hasonlóak, ezért $EV_\lambda = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} EQ$, s így

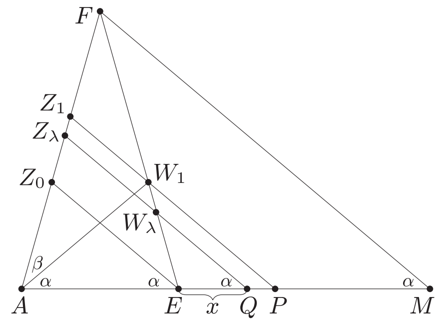
$$W_\lambda V_\lambda = \frac{EV_\lambda}{EN} \cdot NF = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2} x}{\frac{\sqrt{5}+3}{2}} NF = \frac{(\sqrt{5}-1)x}{2} NF.$$

Mivel $MF = NF$, ezért $W_\lambda Z_\lambda = W_\lambda V_\lambda$ pontosan akkor teljesül, ha

$$\frac{3 - \sqrt{5} + (4 - 2\sqrt{5})x}{2} = \frac{(\sqrt{5} - 1)x}{2},$$

azaz ha $x = \sqrt{5}/5$. Ebből pedig azt kapjuk, hogy

$$\lambda = EV_\lambda = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \approx 0{,}7236.$$



4. ábra