I. megoldás. Megmutatjuk, hogy az első kifejezés a nagyobb, vagyis

$$\begin{gathered}2 \cdot \log_3 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_3 7 \cdot \ldots \cdot \log_3 2011 \cdot \log_3 2013 < \\ < \log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \log_3 8 \cdot \ldots \cdot \log_3 2012 \cdot \log_3 2014.\end{gathered}$$

A bal oldalon álló szorzat minden tényezője pozitív, így az egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

$$\begin{gathered}2 \cdot \sqrt{\log_3 3} \cdot \sqrt{\log_3 3 \cdot \log_3 5} \cdot \sqrt{\log_3 5 \cdot \log_3 7} \cdot \ldots \cdot \\ \cdot \sqrt{\log_3 2011 \cdot \log_3 2013} \cdot \sqrt{\log_3 2013} < \\ < \log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \log_3 8 \cdot \ldots \cdot \log_3 2012 \cdot \log_3 2014.\end{gathered}$$

Ha $3 \le n$, akkor a $0 < \log_3 n$ és a $0 < \log_3(n+2)$ kifejezésekre alkalmazva a mértani és számtani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{\log_3 n \cdot \log_3(n+2)} \le \frac{\log_3 n + \log_3(n+2)}{2}.$$

A $\log_3 x$ függvény konkáv, így a Jensen-egyenlőtlenség szerint:

$$\frac{\log_3 n + \log_3(n+2)}{2} \le \log_3\left(\frac{n+(n+2)}{2}\right) = \log_3(n+1),$$

ezért

$$\sqrt{\log_3 n \cdot \log_3(n+2)} \le \log_3(n+1).$$

Ezt rendre $n = 3, 5, \ldots, 2011$-re alkalmazva:

$$\begin{gathered}\sqrt{\log_3 3 \cdot \log_3 5} \cdot \sqrt{\log_3 5 \cdot \log_3 7} \cdot \ldots \cdot \sqrt{\log_3 2011 \cdot \log_3 2013} \le \\ \le \log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \ldots \cdot \log_3 2012,\end{gathered}$$

így az állítás igazolásához elég a következőt belátnunk:

$$2 \cdot \sqrt{\log_3 3} \cdot \sqrt{\log_3 2013} < \log_3 2014.$$

Nyilván $\sqrt{\log_3 2013} < \sqrt{\log_3 2014}$ és $\log_3 3 = 1$, emiatt elég a következőt igazolnunk:

$$\begin{aligned}2 &< \sqrt{\log_3 2014}, \\ 4 &< \log_3 2014, \\ 3^4 = 81 &< 2014\end{aligned}$$

(felhasználva, hogy a $\sqrt{x}$ és a $\log_3 x$ függvény szigorúan monoton nő).

Ezzel beláttuk, hogy a két kifejezés közül valóban az első a nagyobb.

II. megoldás. Először a következő lemmát igazoljuk: Ha $n > 1$ egész szám, akkor $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)$, azaz

$$\log_n(n+1) > \frac{\log_n(n+2)}{\log_n(n+1)},$$

illetve

$$\big(\log_n(n+1)\big)^2 > \log_n(n+2).$$

Ez az $y = n^x$ függvény szigorú monoton növekedése miatt ekvivalens azzal, hogy

$$n^{(\log_n(n+1))^2} > n^{\log_n(n+2)},$$

vagyis

$$(n+1)^{\log_n(n+1)} > n+2.$$

Legyen $n = a$, $1 = b$ és $\log_n(n+1) = k > 1$. Ekkor a belátandó egyenlőtlenség:

$$(a+b)^k > a^k + b^k.$$

Mivel $(a+b)^k > 0$, oszthatunk vele:

$$1 > \left(\frac{a}{a+b}\right)^k + \left(\frac{b}{a+b}\right)^k.$$

Mivel $a, b > 0$, $k > 1$, $\frac{a}{a+b} < 1$ és $\frac{b}{a+b} < 1$, azért

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^k < \frac{a}{a+b}, \quad \text{és} \quad \left(\frac{b}{a+b}\right)^k < \frac{b}{a+b}, \quad \text{így}$$
$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^k + \left(\frac{b}{a+b}\right)^k < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1;$$

ez pedig éppen a bizonyítandó állítás.

Ezután belátjuk, hogy a feladatban megadott első kifejezés a nagyobb. Mivel mindkettő pozitív, ez nyilván ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel:

$$\frac{\log_3 4 \cdot \log_3 6 \cdot \ldots \cdot \log_3 2014}{2 \log_3 3 \cdot \log_3 5 \cdot \ldots \cdot \log_3 2013} > 1,$$

vagyis az áttérési képlet alkalmazásával:

$$A = \log_3 4 \cdot \log_5 6 \cdot \ldots \cdot \log_{2013} 2014 > 2.$$

Legyen $B = \log_4 5 \log_6 7 \ldots \log_{2014} 2015$. A lemma miatt $A > B$, ezért

$$A^2 > AB = \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \ldots \cdot \log_{2013} 2014 \cdot \log_{2014} 2015 =$$
$$= \log_3 4 \frac{\log_3 5}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 6}{\log_3 5} \cdot \ldots \cdot \frac{\log_3 2014}{\log_3 2013} \cdot \frac{\log_3 2015}{\log_3 2014} = \log_3 2015 > 4,$$

tehát valóban $A > 2$.