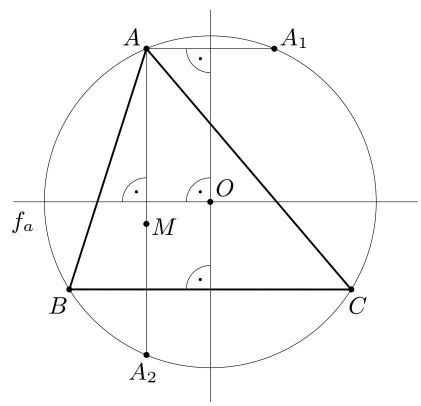
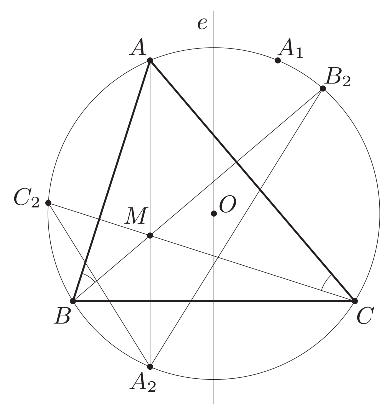
Megoldás. Legyen az ABC háromszög magasságvonalainak a k körülírt körrel való, a csúcsoktól különböző metszéspontja rendre A_2, B_2 és C_2. Mivel AA_2 a k kör BC-re merőleges húrja, ezért ennek f_a felezőmerőlegese átmegy O-n és merőleges BC felezőmerőlegesére is. Vizsgáljuk meg, mi lesz A_2-nek az O-ra vonatkozó tükörképe. Ismert, hogy egy pontra vonatkozó középpontos tükrözés helyettesíthető két olyan egyenesre vonatkozó tengelyes tükrözés egymásutánjával, melyek egymást merőlegesen metszik az adott pontban. Ezért ha A_2-t tükrözzük f_a-ra, majd a képét, A-t, BC felezőmerőlegesére, akkor a kapott A_1 pont megegyezik A_2-nek az O-ra vonatkozó tükörképével (*1. ábra*). Ugyanígy látható be, hogy a B_2, illetve C_2 pontok O-ra vonatkozó tükörképe B_1, illetve C_1.



1. ábra

Tehát az $A_1B_1C_1$ háromszög O-ra vonatkozó tükörképe az $A_2B_2C_2$ háromszög. Ezért K-nak az O-ra vonatkozó tükörképe megegyezik az $A_2B_2C_2$ háromszög beírt körének L középpontjával. Mivel O nyilván felezi az LK szakaszt, ezért feladatunk állításának igazolásához elegendő megmutatnunk, hogy $M \equiv L$, ami ekvivalens azzal, hogy az $A_2B_2C_2$ háromszögben az ABC háromszög magasságvonalai belső szögfelezők.

Legyen az ABC háromszög A-nál lévő szöge α. Mivel $BB_2 \perp AC$ és $CC_2 \perp AB$, ezért $ABB_2\sphericalangle = 90^\circ - \alpha = ACC_2\sphericalangle$. A k körben a kerületi szögek tétele miatt $AA_2B_2\sphericalangle = ABB_2\sphericalangle$ és $AA_2C_2\sphericalangle = ACC_2\sphericalangle$, tehát $AA_2B_2\sphericalangle = AA_2C_2\sphericalangle$ (*2. ábra*). Vagyis AA_2 felezi a $C_2A_2B_2$ szöget. Ugyanígy látható be, hogy BB_2 és CC_2 is szögfelezők, s ezzel feladatunk állítását igazoltuk.



2. ábra