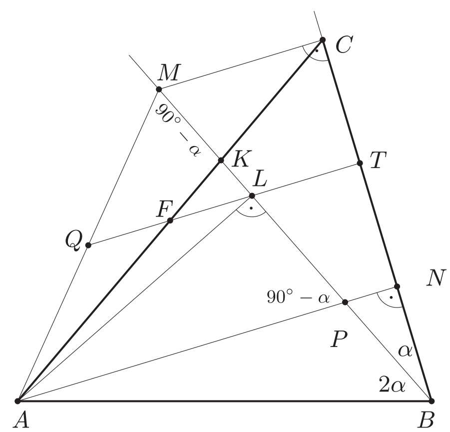
Megoldás. Legyen $KBC\sphericalangle = \alpha$. Ekkor a feltételek szerint $ABK\sphericalangle = 2\alpha$. E szögek segítségével felírva az ABK és KBC háromszögek területét, kapjuk hogy

$$T_{ABK} = \frac{AB \cdot BK \cdot \sin 2\alpha}{2}, \quad \text{valamint}$$
$$T_{KBC} = \frac{BK \cdot BC \cdot \sin \alpha}{2}.$$

A két háromszög B csúcshoz tartozó magassága közös, B-vel szemközti oldalaik aránya pedig $2:1$, mert K az AC oldal harmadolópontja. Ezért $T_{ABK} : T_{KBC} = 2:1$. Ebből a $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ azonosságot is felhasználva kapjuk, hogy

$$AB \cdot BK \cdot \sin\alpha\cos\alpha = BK \cdot BC \cdot \sin\alpha,$$

vagyis ($\sin\alpha \neq 0$ miatt) $\cos\alpha = \dfrac{BC}{AB}$.



Legyen M a B-ből induló BK félegyenesnek az a pontja, melyre $BM = BA$. Ekkor $\cos\alpha = \dfrac{BC}{BM}$, ezért $BCM\sphericalangle = 90^\circ$. Továbbá az ABM háromszög egyenlőszárú, szárszöge 2α, ezért alapon fekvő szögei $MAB\sphericalangle = AMB\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$.

Legyen az A-ból BC-re állított merőleges talppontja N, az AN és BK szakaszok metszéspontja pedig P. A PNB derékszögű háromszög egyik hegyesszöge α, ezért a másik hegyesszög $BPN\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$. Ekkor $MPA\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$ is, mert $MPA\sphericalangle$ és $BPN\sphericalangle$ csúcsszögek, tehát egyenlőek. Ez azt jelenti, hogy az APM háromszög is egyenlőszárú, mert M-nél és P-nél lévő szögei megegyeznek. Ezért az alaphoz tartozó magassága, AL, felezi az MP alapot, tehát L az MP szakasz felezőpontja.

Legyen az AM szakasz felezőpontja Q. Ekkor QL az APM, QF pedig az AMC háromszög középvonala. A középvonalak párhuzamosak a háromszögek megfelelő oldalaival, azaz AP-vel, illetve MC-vel. E két utóbbi viszont egymással is párhuzamos, mert mindkettő merőleges BC-re. Tehát QF és QL is merőlegesek BC-re. Vagyis a Q-ból BC-re állított merőleges tartalmazza F-et és L-et is, ezért FL is merőleges BC-re, ami épp a bizonyítandó állítás.