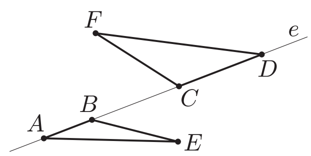
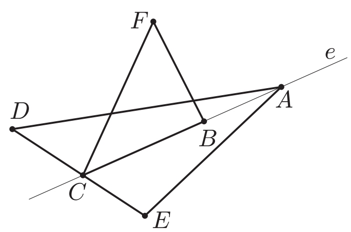
Megoldás. Megmutatjuk, hogy $m = 2k$.

Először azt látjuk be, hogy ha van olyan egyenes, amelyik a $3k$ pont közül legalább $(2k+1)$-et tartalmaz, akkor a pontok nem oszthatók k darab hármas csoportba úgy, hogy az egy csoportban lévő pontok egy háromszög csúcsai. Ez azonnal következik abból, hogy tetszőleges háromszög három csúcsa közül egy egyenes legfeljebb kettőt tartalmaz, ezért k darab különböző háromszög csúcsai közül legfeljebb $2k$ darabot tartalmazhat bármely egyenes.

Ha nincs olyan egyenes, amelyik $2k$-nál többet tartalmaz a $3k$ pont közül, akkor k szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a pontok k darab hármas csoportba oszthatók úgy, hogy az egy csoportban lévő pontok egy háromszög csúcsai. Ha $k = 1$, akkor a feltételünk szerint a három pont nem kollineáris, ezért egy háromszög csúcsait alkotja, tehát ekkor igaz az állítás. A $k = 2$ esetet is külön bizonyítjuk, mert az indukciós lépés során fel fogjuk használni, hogy a pontok száma legalább 6. Ha a pontok közül semelyik három nem kollineáris, akkor bárhogyan is osztjuk őket két csoportba, az egy csoportban lévő pontok egy háromszög csúcsai lesznek. Ha a pontok közül pontosan négy, mondjuk A, B, C és D egy e egyenesre esik, a maradék kettő, E és F pedig nincs rajta e-n, akkor például $\{A, B, E\}$, $\{C, D, F\}$ jó beosztás (*1. ábra*). Végül ha a pontok közül semelyik négy nem kollineáris, de mondjuk A, B és C egy e egyenesre esik, akkor a maradék három pont közül válasszunk ki kettőt, legyenek ezek D és E. Feltehető, hogy a DE és e egyenesek metszéspontja nem A. Ekkor ha a hatodik pont F, akkor például $\{A, D, E\}$, $\{B, C, F\}$ jó beosztás (*2. ábra*).



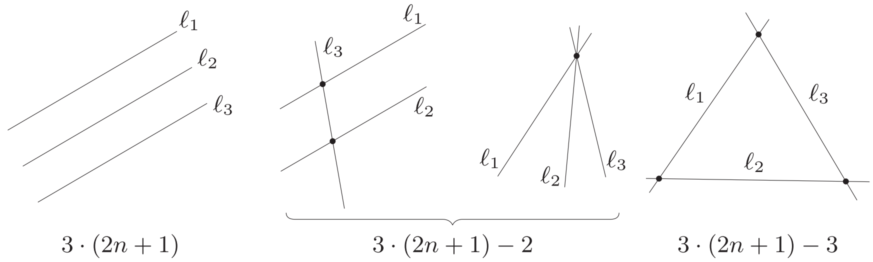
1. ábra



2. ábra

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $k = n > 1$-re. Legyen adott $3(n+1)$ különböző pont úgy, hogy közülük legfeljebb $2(n+1)$ esik egy egyenesbe. Tekintsük azokat az egyeneseket, melyek a pontok közül legalább kettőt tartalmaznak. Legyen ezek száma N. (Az ilyen egyenesek száma véges, hiszen nyilván fennáll az $N \le \binom{3n+3}{2}$ egyenlőtlenség.) Jelölje ezeket az egyeneseket $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_N$, és válasszuk úgy a számozást, hogy ha $|\ell_i|$ az adott pontok közül azoknak a száma, melyeket az ℓ_i egyenes tartalmaz, akkor minden $i = 1, 2, \ldots, N-1$ esetén teljesüljön az $|\ell_i| \ge |\ell_{i+1}|$ egyenlőtlenség (a számozás nem egyértelmű, mert lehetnek olyan egyenesek, melyek ugyanannyi pontot tartalmaznak).

Először megmutatjuk, hogy $|\ell_3| < 2n+1$. Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ha $|\ell_3| \ge 2n+1$, akkor $|\ell_2| \ge 2n+1$ és $|\ell_1| \ge 2n+1$ is fennáll. Ezért e három egyenes az adott pontok közül legalább $3(2n+1)-3 = 6n$ különbözőt tartalmaz, hiszen az egyeneseken lévő pontok közül legfeljebb az $\ell_1 \cap \ell_2$, $\ell_1 \cap \ell_3$ és $\ell_2 \cap \ell_3$ pontokat számoltuk kétszer a $3(2n+1)$ összegben (*3. ábra*). Viszont $n > 1$ miatt $6n > 3n+3$, s ebből az ellentmondásból következik, hogy $|\ell_3| < 2n+1$. Hasonló módon látjuk be, hogy $|\ell_2| < 2n+2$. Ha ugyanis $|\ell_2| \ge 2n+2$, akkor $|\ell_1| \ge 2n+2$, ezért e két egyenes az adott pontok közül legalább $2(2n+2)-1 = 4n+3 > 3n+3$ különbözőt tartalmaz, hiszen az egyeneseken lévő pontok közül legfeljebb az $\ell_1 \cap \ell_2$ pontot számoltuk kétszer a $2(2n+2)$ összegben. Ebből az ellentmondásból következik, hogy $|\ell_2| < 2n+2$.



3. ábra

Tehát $|\ell_1| \leq 2n+2$, $|\ell_2| \leq 2n+1$, és ha $i > 2$, akkor $|\ell_i| \leq 2n$ teljesül. Válasszunk ki az ℓ_1 egyenesen lévő adott pontok közül kettőt tetszőlegesen, és vegyünk hozzájuk harmadiknak az ℓ_2 egyenesen lévő adott pontok közül egy olyat, amelyik nincs rajta az ℓ_1 egyenesen. E három pont nyilván háromszöget alkot. A maradék $(3n+3)-3 = 3n$ pontra pedig teljesül az indukciós feltevésünk, mert közülük semelyik $2n$ nincs egy egyenesen. Hiszen továbbra is csak az ℓ_i egyenesek tartalmaznak a pontok közül legalább kettőt, az ℓ_1-en lévő maradék pontok száma legfeljebb $(2n+2)-2 = 2n$, az ℓ_2-en lévő maradék pontok száma legfeljebb $(2n+1)-1 = 2n$, a többi egyenesre pedig $|\ell_i| \leq 2n$ teljesül. Vagyis ezek a pontok beoszthatók n darab hármas csoportba úgy, hogy az egy csoportban lévő pontok egy háromszög csúcsai. Ezért a $3n+3$ pont is beosztható a feltételeknek megfelelően, s ezzel állításunkat beláttuk.