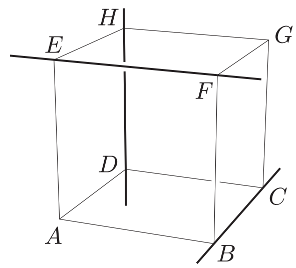
I. megoldás. Egy kocka bármely éle a kockának két lapján van rajta és két csúcsát tartalmazza. Mivel kitérő egyenesek nincsenek egy síkban, ezért a kocka minden lapsíkján a három páronként kitérő élegyenes közül pontosan egy van rajta és a kocka nyolc csúcsa közül pontosan kettő olyan van, amelyiken a három páronként kitérő élegyenes közül egyik sem megy át.

Feltehető, hogy az $ABCDEFGH$ kocka három páronként kitérő élegyenese közül az egyik a BC (*1. ábra*). Ekkor a kocka A-n, illetve D-n átmenő élegyenesei közül csak az egymással párhuzamos AE és DH egyenesek kitérők BC-vel. Ezért a három páronként kitérő élegyenes az $ABCD$ lapnak legfeljebb három csúcsát tartalmazza. Ez nyilván a kocka bármely lapjára igaz, ezért minden lapon van legalább egy olyan csúcs, melyet a három páronként kitérő élegyenes egyike sem tartalmaz. De mivel az ilyen csúcsok száma kettő, és minden csúcsra a kockának három lapja illeszkedik, ezért ez azt jelenti, hogy a három páronként kitérő élegyenes által nem tartalmazott két csúcsra a kocka hat lapja közül három-háromnak kell illeszkednie, tehát a két nem tartalmazott csúcs a kocka egy testátlójának két végpontja kell, hogy legyen.

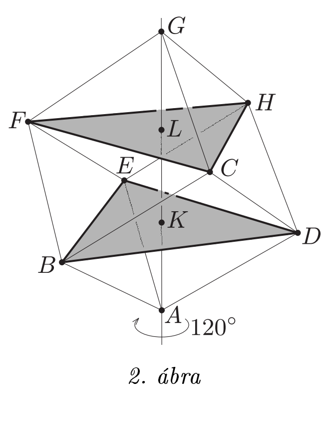


1. ábra

A kockának a BC él felezőmerőleges síkjára való szimmetriája miatt feltehetjük, hogy ez a testátló AG. Ekkor a D-n átmenő élek közül DH kell, hogy szerepeljen a három páronként kitérő élegyenes közt, s ezért a harmadik egyenes csak EF lehet.

Megmutatjuk, hogy az AG testátló minden pontja egyenlő távolságra van a BC, DH és EF egyenesektől. Ehhez elegendő belátnunk, hogy a testátló körüli $120°$-os forgatások a három egyenest ciklikusan permutálják, mert ebből a forgatás szögtartása miatt következik, hogy a testátló egy tetszőleges T pontjából a BC, DH és EF egyenesekre bocsájtott merőlegeseket is permutálják a forgatások, azaz T egyenlő távolságra van a három egyenestől.

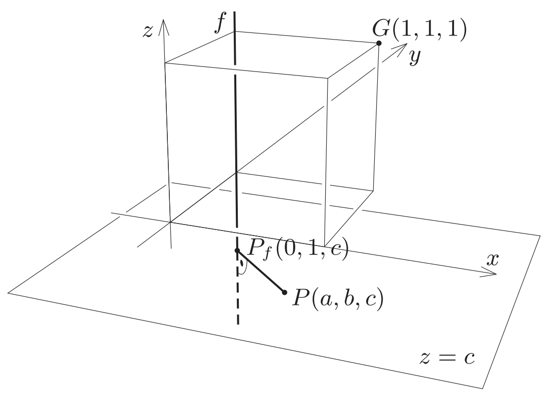
A BDE és CFH háromszögek szabályosak, mert mindegyik oldaluk hossza megegyezik a kocka lapátlójának hosszával. Legyen K, illetve L e két szabályos háromszög középpontja. Mivel $AB = AD = AE$ és $GB = GD = GE$, ezért A is és G is rajta van a BDE háromszög síkjára K-ban állított merőlegesen, azaz AG merőleges a BDE háromszög síkjára és átmegy K-n. Az $AC = AF = AH$ és $GC = GF = GH$ egyenlőségekből pedig ugyanígy az következik, hogy AG merőleges a CFH háromszög síkjára is és átmegy L-en is. Ezért az AG körüli $120°$-os forgatásnál B, D és E egy K középpontú körön mozog és $B \mapsto D$, $D \mapsto E$ és $E \mapsto B$, míg C, H és F egy L középpontú körön mozog és $C \mapsto H$, $H \mapsto F$ és $F \mapsto C$ (*2. ábra*). Ez pedig azt jelenti, hogy a három kitérő egyenesre $BC \mapsto DH$, $DH \mapsto EF$ és $EF \mapsto BC$, amit bizonyítani akartunk.



2. ábra

II. megoldás. Vegyünk fel egy térbeli derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy az origója legyen A, a tengelyek legyenek párhuzamosak a kocka éleivel és legyen $G = (1, 1, 1)$. Jelöljük a BC, DH és EF egyeneseket rendre e, f és g-vel. Ekkor ezek egyenletrendszere:

$$e\colon X = 1 \text{ és } Z = 0; \quad f\colon Y = 1 \text{ és } X = 0; \quad g\colon Z = 1 \text{ és } Y = 0.$$



3. ábra

Ha $P = (a, b, c)$ egy tetszőleges pont, akkor a P-n átmenő, az e, f és g egyenesekre merőleges síkok egyenletei rendre

$$Y = b, \quad Z = c \quad \text{és} \quad X = a,$$

e síkoknak az egyenesekkel való metszéspontjai pedig

$$P_e = (1, b, 0), \quad P_f = (0, 1, c) \quad \text{és} \quad P_g = (a, 0, 1).$$

A P pontnak az egyenesektől való távolságai tehát

$$PP_e = \sqrt{(a-1)^2 + c^2}, \quad PP_f = \sqrt{a^2 + (b-1)^2} \quad \text{és} \quad PP_g = \sqrt{b^2 + (c-1)^2}.$$

Látható, hogy ha $a = b = c$, akkor $PP_e = PP_f = PP_g = \sqrt{(a-1)^2 + a^2}$, tehát a kocka AG testátlójának minden pontja egyenló távolságra van a három páronként kitérő BC, DH és EF élegyenestől.

Megjegyzés. A második megoldásból az is látszik, hogy nem csak a testátló pontjai vannak egyenlő távolságra a három élegyenestől. A P pont pontosan akkor van egyenlő távolságra a három egyenestől, ha $PP_e = PP_f$ és $PP_e = PP_g$ egyszerre teljesül. Az első egyenlőséget rendezve kapjuk, hogy

$$(a-1)^2 + c^2 = a^2 + (b-1)^2,$$

azaz

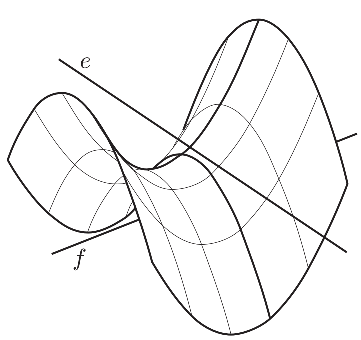
$$c^2 - b^2 = 2(a - b).$$

Vagyis P pontosan akkor van egyenlő távolságra az e és f élegyenestől, ha rajta van a

$$Z^2 - Y^2 = 2(X - Y) \tag{1}$$

egyenletű felületen. Ez egy jól ismert másodrendű felület, *hiperbolikus paraboloidnak,* vagy *nyeregfelületnek* nevezik (*4. ábra*). Geometriai tulajdonságainak részletes leírása megtalálható pl. Hajós Gy.: *Bevezetés a geometriába* című könyvének 50.7. fejezetében. Ugyanígy kapjuk, hogy a $PP_e = PP_g$ feltételnek eleget tevő pontok is egy nyeregfelületen vannak, melynek egyenlete

$$X^2 - Y^2 = 2(X - Z). \tag{2}$$



4. ábra

A három éltől egyenlő távolságra lévő pontok pedig a két nyeregfelület közös részén vannak. Két nyeregfelület metszete általában egy negyedrendű térgörbe, esetünkben viszont némileg egyszerűbb a helyzet, mert a metszet szétesik két görbére, melyek egyike az $X = Y = Z$ egyenletrendszerű egyenes. A másik görbét az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldásából kapjuk. Csak két egyenletünk van és három ismeretlen, így egy t paraméter segítségével tudjuk megadni azokat a megoldásokat, melyekre $X \neq Y \neq Z$ teljesül. A számolást most nem részletezzük. A megoldás:

$$X(t) = \frac{t^3 - 4t + 8}{2\left(t^2 - 2t\right)},$$
$$Y(t) = \frac{t^3 - 4t^2 + 4t - 8}{2\left(t^2 - 2t\right)},$$
$$Z(t) = \frac{-t^3 + 4t^2 - 12t + 8}{2\left(t^2 - 2t\right)}.$$

Minden $0 \neq t \neq 2$ valós számhoz tartozik a metszetgörbének egy pontja. Ha pl. $t = 1$, akkor $X(t) = -5/2$, $Y(t) = 7/2$ és $Z(t) = 1/2$. Tehát az

$$R = \left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

olyan pont, mely mindhárom élegyenestől ugyanolyan távolságra, pontosan $5\sqrt{2}/2$-re van.