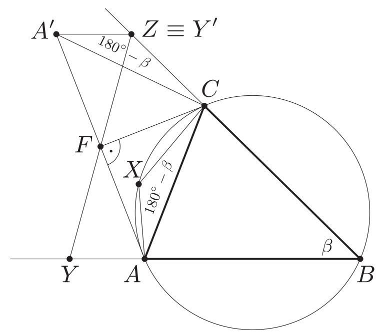
Megoldás. Legyen az YZ szakasz felezőpontja F. Jelölje az A és Y pontok F-re vonatkozó tükörképét A' és Y'. Ekkor $Y' \equiv Z$. Mivel bármely szakasz párhuzamos a középpontos tükörképével, ezért $A'Z$ párhuzamos AY-nal, s így AB-vel (*1. ábra*). Ezért ha az ABC háromszög B-nél lévő szöge β, akkor $A'ZB\sphericalangle = 180° - \beta$. Az $ABCX$ négyszög húrnégyszög, ezért $AXC\sphericalangle = 180° - ABC\sphericalangle = 180° - \beta$. Tehát az AXC és az $A'ZC$ háromszögek egybevágóak, mert megegyezik egy szögük és az azt közrefogó két oldaluk, hiszen $AX = AY = A'Z$ és $CX = CZ$. Vagyis $AC = A'C$, azaz a $CA'A$ háromszög egyenlőszárú. Ezért alapjának F felezőpontját a C csúccsal összekötő egyenes az alap felezőmerőlegese, vagyis CF merőleges FA-ra. Tehát Thalész tételének megfordítása szerint F rajta van az AC szakasz k Thalész-körén.

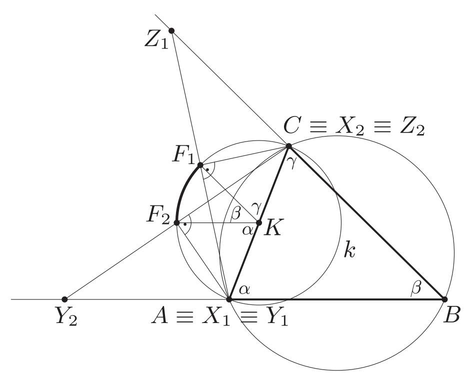


1. ábra

Meg kell még vizsgálnunk, hogy k mely pontjai állnak elő az YZ szakaszok felezőpontjaként. Legyen az ABC háromszög A-nál, illetve C-nél lévő szöge α, illetve γ. Az X pont két szélső helyzete $X_1 \equiv A$ és $X_2 \equiv C$. Az első esetben $Y_1 \equiv A$ és F_1 a CZ_1A egyenlőszárú háromszög Z_1A alapjának felezőpontja. Mivel $Z_1CA\sphericalangle = 180° - \gamma$, ezért $F_1CA\sphericalangle = 90° - \gamma/2$. Ugyanígy kapjuk, hogy ha $X_2 \equiv C$, akkor $F_2AC\sphericalangle = 90° - \alpha/2$ (*2. ábra*). Ha k középpontja (AC felezőpontja) K, akkor az F_1KC és az F_2KA egyenlőszárú háromszögekből azt kapjuk, hogy

$$F_1KC\sphericalangle = 180° - 2 \cdot F_1CA\sphericalangle = 180° - 2 \cdot \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) = \gamma,$$

és ugyanígy $F_2KA\sphericalangle = \alpha$, ezért $F_1KF_2\sphericalangle = 180° - (\gamma + \alpha) = \beta$.



2. ábra

Ha X folytonosan mozog A-ból C-be, akkor F is nyilván folytonosan mozog F_1-ből F_2-be. Tehát a keresett mértani hely az AC szakasz Thalész körének a β középponti szögű F_1F_2 íve.