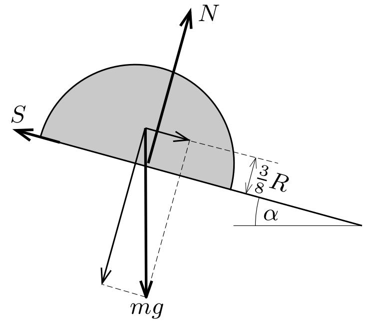
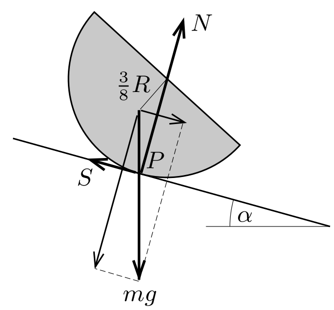
Megoldás. A megoldás során felhasználjuk, hogy egy R sugarú, homogén félgömb tömegközéppontja a félgömb szimmetriatengelyén, a sík felületétől $3/8\,R$ távolságra található.

a) Tételezzük fel, hogy a fokozatosan növekvő hajlásszögű lejtőn a test nem billen fel, de valamekkora α hajlásszögnél megcsúszik. Az m tömegű testre ható *erők egyensúlyából* következik, hogy a lejtő által kifejtett nyomóerő $N = mg\cos\alpha$, a súrlódási erő pedig $S = mg\sin\alpha$ (*1.* és *2. ábra*).



1. ábra



2. ábra

Csúszásmentes állapotban $S \leq \mu N$ (ahol μ a tapadási súrlódási együttható), vagyis $\operatorname{tg}\alpha \leq \mu = 0{,}3$. A megcsúszás pillanatában $\operatorname{tg}\alpha = \mu$, tehát $\alpha = 16{,}7^\circ$. Ez az érték *független* attól, hogy melyik felével helyeztük a félgömböt a lejtőre.

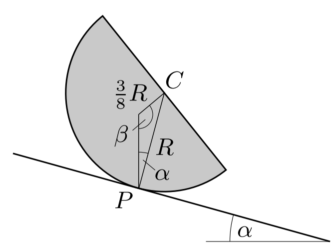
b) Helyezzük a félgömböt a domború oldalával lefelé a lejtőre (2. ábra). A test egyensúlyának feltétele (az erőegyensúlyon kívül) még az is, hogy a testre ható erők eredő forgatónyomatéka tetszőleges pontra (tetszőleges tengelyre) vonatkoztatva zérus legyen. Az $\boldsymbol{S}$ súrlódási erő és az $\boldsymbol{N}$ nyomóerő hatásvonala áthalad a félgömb és a lejtő P érintkezési pontján, forgatónyomatékuk tehát erre a pontra zérus. Az eredő forgatónyomaték akkor tűnik el, ha a függőleges irányú $m\boldsymbol{g}$ nehézségi erő hatásvonala is áthalad a P ponton. A *3. ábrán* látható háromszögre felírva a szinusztételt:

$$\frac{\frac{3}{8}R}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\beta}.$$

Innen (α már korábban kiszámított értékét felhasználva) β-ra két megoldást is kapunk:

$$\beta_1 = \arcsin\left(\frac{8}{3}\sin\alpha\right) \approx 50{,}0^\circ \qquad \text{és} \qquad \beta_2 = 180^\circ - \beta_1 \approx 130{,}0^\circ.$$

Ezek közül β_2 felel meg a félgömb *stabil* egyensúlyi helyzetének; a másik megoldás *labilis* egyensúlyi állapotot ír le, tehát jelen esetben figyelmen kívül hagyható.

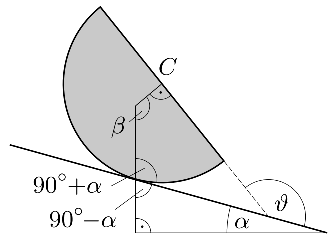


3. ábra

Megjegyzés. A stabilitást például úgy vizsgálhatjuk, ha kiszámítjuk és grafikusan ábrázoljuk a csúszásmentesen gördített félgömb helyzeti energiáját a P pont elmozdulásának függvényében. A kapott „hullámosan emelkedő” függvény lokális maximuma az instabil, helyi minimuma pedig a stabil egyensúlyi állapotnak felel meg.

A *4. ábráról* leolvashatjuk, hogy a lejtő és a félgömb sík oldala közötti szög

$$\vartheta = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 33{,}3^\circ.$$



4. ábra

c) Ha a súrlódási együttható elegendően nagy, akkor a félgömb nem tud megcsúszni, de az α szög növekedtével fel tud borulni.

I. Tekintsük először azt az esetet, amikor a félgömböt a sík oldalával lefelé helyeztük a lejtőre. Az 1. ábrán látható, hogy az S erő forgatónyomatéka a tömegközépponton átmenő és az ábra síkjára merőleges tengelyre $-\frac{3}{8}R{\cdot}S$. Ugyanezen tengelyre az N erő nyomatéka $N \cdot (xR)$, ahol $|x| \leq 1$ (hiszen az erő támadáspontja nem eshet a félgömb és a lejtő érintkezési felületén kívülre). Az egyensúly feltétele:

$$N \cdot (xR) - \frac{3}{8}R \cdot S = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{S}{N} = \frac{8}{3}x \leq \frac{8}{3}.$$

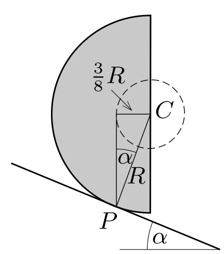
Az *a*) pontban kapott $\operatorname{tg}\alpha = S/N$ és $\mu \geq \operatorname{tg}\alpha$ összefüggések felhasználásával az $\alpha \leq \operatorname{arctg}\left(\frac{8}{3}\right) = 69{,}4^\circ$ és $\mu \geq \operatorname{tg}\alpha_{\max} = \frac{8}{3} \approx 2{,}7$ megszorításokat kapjuk.

II. Ha a félgömb a domború oldalával lefelé fekszik a lejtőn, akkor a nehézségi erő hatásvonalának át kell haladnia a P érintkezési ponton (lásd a *b*) pontban leírtakat és a 3. ábrát). Ez csak akkor lehetséges, ha a félgömb C középpontjának és a P pontnak vízszintes irányban mért távolsága legfeljebb $\frac{3}{8}R$. A határesetet az *5. ábra* mutatja. Ezen látható, hogy a kritikus hajlásszög

$$\alpha_{\max} = \arcsin\frac{\frac{3}{8}R}{R} = \arcsin\left(\frac{3}{8}\right) = 22{,}0^\circ,$$

és a minimális tapadási súrlódási együttható

$$\mu_{\min} = \operatorname{tg}\alpha_{\max} = 0{,}40.$$



5. ábra