I. megoldás. A feladatban megfogalmazottnál erősebb állítást bizonyítunk. Legyen A a Q-nak egy *tetszőleges* részhalmaza, és legyen $B = Q \setminus A$. Ekkor az olyan (a, b) párok száma, amelyekben $a \in A$, $b \in B$, továbbá az a és b sorozatok csak egyetlen tagban térnek el egymástól, legalább $\min\big(|A|, |B|\big)$. Világos, hogy a fenti állítás $|A| = 2^{n-1}$ esetén éppen a kitűzött feladat.

A fent megfogalmazott állítást n szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $n = 1$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy az állítás n-re igaz, és lássuk be $(n + 1)$-re. Legyenek tehát az A halmaz elemei bizonyos $n + 1$ tagú 0/1-sorozatok, B pedig álljon a többi $n + 1$ tagú 0/1-sorozatból. Feltehetjük, hogy $|A| \leq |B|$, mert ellenkező esetben felcserélhetjük A és B szerepét. Legyen az A-beli, 0-ra végződő sorozatok száma x, az 1-re végződőké y. Ekkor tehát $x + y = |A| \leq 2^n$. Feltehetjük, hogy $x \geq y$. Ekkor $y \leq 2^{n-1}$.

A feladatban leszámlálandó (a, b) párok négyfélék lehetnek aszerint, hogy mi a, illetve b utolsó tagja.

1. Olyan párokból, ahol ez a két utolsó tag 1, az indukciós feltevés szerint legalább $\min(y, 2^n - y) = y$ darab van.

2. Olyanokból, ahol ez a két utolsó tag 0, az indukciós feltevés szerint legalább $\min(x, 2^n - x) \geq y$ darab van.

3. Olyanokból, ahol a utolsó tagja 0, b-é pedig 1, legalább $x - y$ darab van, hiszen az x darab A-beli, 0-ra végződő sorozat között legfeljebb y olyan lehet, amelynek utolsó tagját 1-re változtatva ismét A-beli sorozatot kapunk.

4. A negyedik fajta párból legalább 0 darab van.

A vizsgált párok száma tehát legalább $y + y + (x - y) + 0 = x + y = |A|$. Ezzel az indukciós lépést igazoltuk, a fent megfogalmazott állítás bizonyítását befejeztük. $\square$

II. megoldás. Az I. megoldásban igazolt állításnál egy erősebbet bizonyítunk az alábbiakban.

Azt mondjuk, hogy a Q-beli $q_1, q_2, \ldots$ sorozatok *monoton sort* alkotnak, ha minden értelmes i-re q_i és q_{i+1} egyetlen tagban tér el egymástól, továbbá q_i és q_{i+1} eltérése korábban van, mint a q_{i+1} és q_{i+2} eltérése. Világos például, hogy egy monoton sor hossza legfeljebb $n+1$ lehet, de az is könnyen látható, hogy tetszőleges $x, y \in Q$ sorozatokra pontosan egy olyan monoton sor létezik, amely x-szel kezdődik és y-ra végződik.

Legyen most $A \subseteq Q$, $B = Q \setminus A$, és tegyük fel, hogy $|A| \leq 2^{n-1}$. Az iménti megfigyelésünk szerint az olyan monoton sorok száma, amelyek A-beli sorozatból indulnak és B-beliben érnek véget, pontosan $|A| \cdot |B|$. Világos, hogy minden ilyen $q_1, q_2, \ldots$ monoton sorhoz van legalább egy olyan i index, amelyre $q_i \in A$ és $q_{i+1} \in B$.

Most tegyük fel, hogy az $a \in A$ és $b \in B$ sorozatok pontosan egy (mondjuk az i-edik) tagban térnek el. Az olyan monoton sorok száma, amelyek az a és a b sorozatot is tartalmazzák, pontosan 2^{n-1}, hiszen minden ilyen monoton sort egyértelműen meghatároznak azok a helyek, amelyeken található tagokban a sorban egymást követő sorozatok eltérnek. Az i-dik hely bizonyosan ilyen eltérés (az egymást követő a és b sorozatok miatt), a fennmaradó $n - 1$ hely mindegyikéről pedig egymástól függetlenül eldönthetjük, hogy legyen-e a monoton sorban két egymást követő sorozat, amelyek ott térnek el, vagy ne.

Ezek szerint a feladatban leírt (a, b) párok számának 2^{n-1}-szerese nem lehet kisebb $|A| \cdot |B|$-nél, azaz az A-ból B-be vezető monoton sorok számánál. Tehát a keresett (a, b) párok száma legalább

$$|A| \cdot \frac{|B|}{2^{n-1}} \geq |A| \cdot \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} = |A|.$$

A bizonyítandó állítás innen közvetlenül adódik az $|A| = 2^{n-1}$ feltételből. $\square$

Megjegyzések. 1. A II. megoldás gondolatmenete Molnár-Sáska Zoltán megoldásából származik. Lényegében ugyanez az érvelés rekonstruálható Matolcsi Dávid dolgozatából is.

2. Ahogy a II. megoldásban, tegyük fel ismét, hogy $A \subseteq Q$, $B = Q \setminus A$, valamint $|A| \leq 2^{n-1}$. A II. megoldásból könnyen levezethető, hogy az olyan (a, b) párok száma, amelyek csak egy tagban térnek el és $a \in A$, illetve $b \in B$, pontosan akkor egyenlő $|A|$-val, ha $A = \emptyset$ vagy ha $|A| = 2^{n-1}$ és A mindazon sorozatok halmaza, amelyeknek egy konkrét tagja rögzített, a többit pedig az összes lehetséges módon választjuk.

3. A kitűzött feladat lényegében ekvivalens azzal az ismert ténnyel, hogy a hiperkocka ún. Cheeger-száma 1-gyel egyenlő.