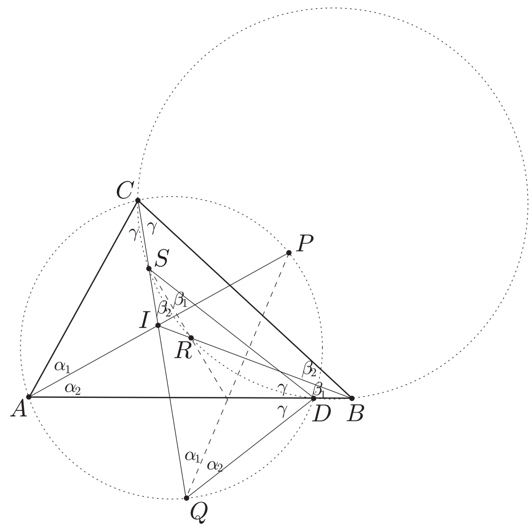
Megoldás. Legyen

$$\alpha_1 = IAC\sphericalangle, \quad \alpha_2 = BAI\sphericalangle, \quad \beta_1 = IBA\sphericalangle, \quad \beta_2 = CBI\sphericalangle, \quad \gamma = ICB\sphericalangle = ACI\sphericalangle.$$

Írjuk fel a Ceva-tétel trigonometrikus alakját az ABC háromszögre és az I pontra:

$$\frac{\sin IAC\sphericalangle}{\sin BAI\sphericalangle} \cdot \frac{\sin IBA\sphericalangle}{\sin CBI\sphericalangle} \cdot \frac{\sin ICB\sphericalangle}{\sin ACI\sphericalangle} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma} = 1.$$



A kerületi szögek tételéből (irányított, azaz modulo 180° szögekkel):

$$\begin{aligned}
PQS\sphericalangle &= PQC\sphericalangle = PAC\sphericalangle = IAC\sphericalangle = \alpha_1,\\
DQP\sphericalangle &= DAP\sphericalangle = BAI\sphericalangle = \alpha_2,\\
RSD\sphericalangle &= RBD\sphericalangle = IBA\sphericalangle = \beta_1,\\
QSR\sphericalangle &= CSR\sphericalangle = CBR\sphericalangle = CBI\sphericalangle = \beta_2,\\
ADQ\sphericalangle &= ACQ\sphericalangle = ACI\sphericalangle = \gamma,\\
SDA\sphericalangle &= SDB\sphericalangle = SCB\sphericalangle = ICB\sphericalangle = \gamma.
\end{aligned}$$

Végül alkalmazzuk a Ceva-tétel (trigonometrikus alakjának) megfordítását a DSQ háromszögre. Mivel

$$\frac{\sin ADQ\sphericalangle}{\sin SDA\sphericalangle} \cdot \frac{\sin RSD\sphericalangle}{\sin QSR\sphericalangle} \cdot \frac{\sin PQS\sphericalangle}{\sin DQP\sphericalangle} = \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = 1,$$

a $DA = AB$, RS és PQ egyenesek egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak egymással. □

Megjegyzés. Láttuk, hogy az ABC háromszög hasonló a QSD háromszöghöz. Legyen I' az ABC háromszög I pontjának megfelelője a QSD háromszögben. A fenti bizonyítás kulcsa az, hogy a QSD háromszögben az I' izogonális konjugáltja éppen az AB, PQ és RS egyenesek közös pontja.