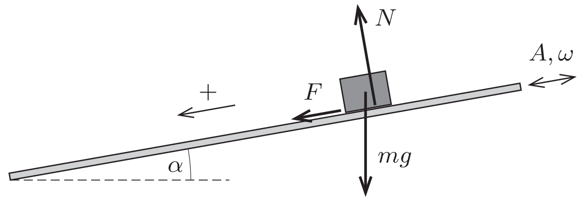
Megoldás. Az m tömegű hasábra az mg nehézségi erő, az N kényszererő és az F (csúszási vagy tapadási) súrlódási erő hat (utóbbi iránya a deszkalap rezgetése során változik). A test mozgásegyenletei a lejtőre merőleges, illetve azzal párhuzamos irányban:

$$N - mg\cos\alpha = 0, \qquad F + mg\sin\alpha = ma.$$

A gyorsulásnál a lejtés irányát választottuk pozitívnak, lásd a *2. ábrát*.



2. ábra

Tapadás esetén a kényszererő és a súrlódási erő között az $|F| \le \mu N$ egyenlőtlenség áll fenn, míg csúszásnál $|F| = \mu N$. A hasáb gyorsulása akkor a lehető legnagyobb, ha a hasáb csúszik, és a hasáb *deszkához viszonyított* (relatív) sebessége negatív irányba mutat. Ekkor

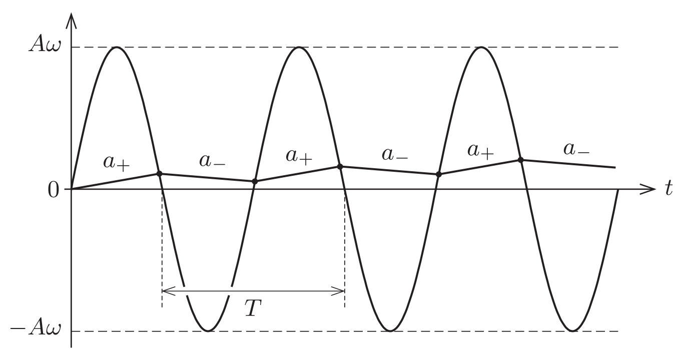
$$a_{\max} = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

amelyre az adatok behelyettesítése után $a_{\max} \approx 5{,}6\ \mathrm{m\ s^{-2}}$ adódik. A deszkalap legnagyobb gyorsulása a harmonikus rezgés következtében $A\omega^2 = 250\ \mathrm{m\ s^{-2}}$, amely több mint 40-szer akkora, mint $a_{\max}$ értéke, így a hasáb a rezgetés indításakor *azonnal megcsúszik.* Látni fogjuk, hogy a test a további mozgása során sehol sem tapad meg, tehát mindvégig az (állandó nagyságú) csúszási súrlódási erő hat rá.

A hasáb gyorsulása a mozgás során tehát kétféle értéket vehet fel aszerint, hogy a súrlódási erő éppen a pozitív vagy negatív irányba mutat:

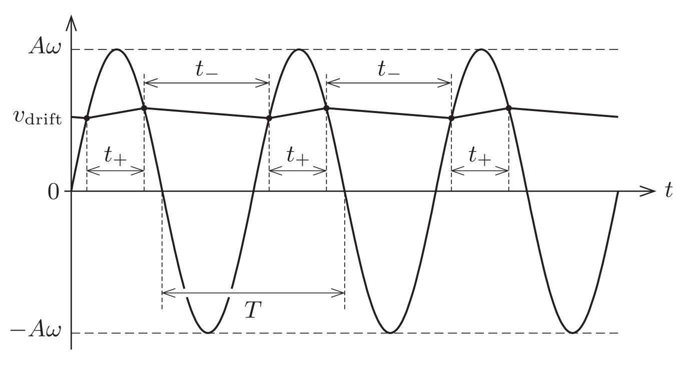
$$a_{\pm} = g(\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha), \tag{1}$$

és mivel a megadott számadatok szerint $\mu > \operatorname{tg}\alpha$, így a_+ előjele pozitív, a_- előjele pedig negatív. Az a_+ gyorsulású mozgásszakasz addig tart, amíg a deszka (előjeles) sebessége nagyobb a hasáb sebességénél, míg az a_- gyorsulású mozgásszakaszban a helyzet éppen fordított. A *3. ábrán* látható grafikonon ábrázoltuk a deszkalap és a hasáb sebességét az idő függvényében. Utóbbi egy olyan töröttvonallal ábrázolható, ahol az egyes szakaszok meredeksége a_+ és a_-. Mivel $|a_+| > |a_-|$, így a hasáb egy periódusra vett átlagsebessége (a „sodródási sebesség") egyre növekszik, miközben a test lefelé sodródik a deszkán.



3. ábra

A sodródási sebesség növekedése addig tart, amíg a hasáb átlaggyorsulása zérussá nem válik. Ezután a hasáb sebessége egy állandó v_{drift} érték körül fluktuál (*4. ábra*). Ez az állandósult (stacionárius) mozgás a viszonylag nagy rezgetési frekvencia miatt hamar kialakul, így a teljes mozgási idő becslésekor a kezdeti felgyorsulás időszakát el is hanyagolhatjuk.



4. ábra

Az állandósult sodródás feltétele:

$$\langle a \rangle \equiv \frac{a_+ t_+ + a_- t_-}{T} = 0. \tag{2}$$

Természetesen fennáll a

$$T = t_+ + t_- \tag{3}$$

egyenlőség is. Az (1)-(3) egyenletekből megkaphatjuk a t_+ időtartam hosszát:

$$t_+ = \frac{a_-}{a_- - a_+} T = \left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu}\right)\frac{T}{2}. \tag{4}$$

A sodródási sebességet pedig abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy a hasáb gyorsulása akkor vált irányt, amikor a deszka és a hasáb sebessége megegyezik. A sebesség (v_{drift} értékéhez képest kicsiny) fluktuációját elhanyagolva:

$$v_{\mathrm{drift}} \approx A\omega \cos\left(\omega \frac{t_+}{2}\right).$$

Végül, behelyettesítve a (4) eredményt:

$$v_{\mathrm{drift}} = A\omega \cos\left[\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu}\right)\frac{\pi}{2}\right] = A\omega \sin\left(\frac{\pi \operatorname{tg}\alpha}{2\mu}\right).$$

A számszerű adatokat felhasználva $v_{\mathrm{drift}} \approx 0{,}32$ m s^{-1} értéket kapunk, így a hasáb mozgásának becsült ideje

$$t = \frac{L}{v_{\mathrm{drift}}} \approx 18{,}8 \text{ s}.$$

Hátravan még annak belátása, hogy a hasáb valóban nem tapad meg soha a lejtőn. A megtapadásnak két feltétele van: az egyik, hogy egy adott pillanatban a test és a deszkalap sebessége megegyezzen; a másik, hogy ugyanebben a pillanatban a deszka gyorsulásának nagysága kisebb legyen $|a_+|$-nál vagy $|a_-|$-nál aszerint, hogy a deszka épp lefelé vagy felfelé gyorsul. A sebesség-idő grafikonról látszik, hogy ez a két feltétel csak akkor következhet be, amikor a deszka gyorsulása nagyon kicsi, azaz sebessége nagy ($A\omega$-hoz közeli). Ekkora sebességre azonban nem tud felgyorsulni a hasáb, mert már előbb beáll a nála jóval kisebb v_{drift}. A hasáb tehát végig csúszva halad a lejtőn.

Megjegyzés. A megoldás során felhasználtuk, hogy a mozgás első, átmeneti szakasza (amely alatt a hasáb átlagsebessége eléri a v_{drift} értéket) rövid. Részletesebb számolással megmutatható, hogy ez az időtartam

$$\tau \approx \frac{A\omega}{\mu g \cos\alpha} \approx 0{,}13 \text{ s}$$

nagyságrendű, tehát a becslésnél elkövetett hibánk valóban elhanyagolható (1–2% körüli érték).