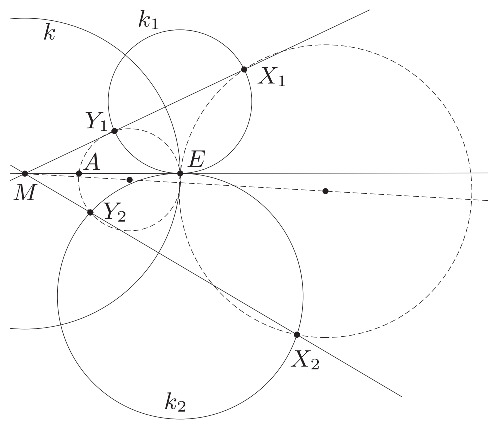
Megoldás. Jelölje M a k_1 és k_2 körök közös belső érintőjének X_1Y_1 egyenesével való metszéspontját. A feltétel szerint ekkor M rajta van az X_2Y_2 egyenesen is (*1. ábra*).



1. ábra

Vegyük észre, hogy az M pont k_1 és k_2 körökre vonatkoztatott hatványa egyenlő:

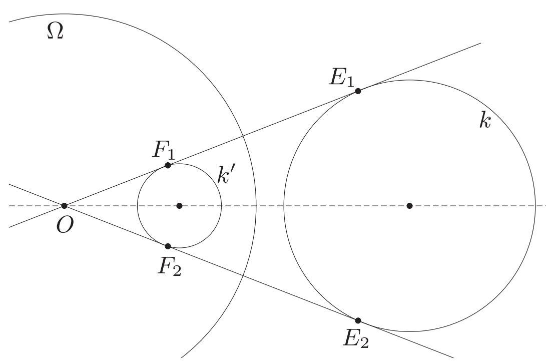
$$MX_1 \cdot MY_1 = ME^2 = MX_2 \cdot MY_2. \tag{1}$$

Most írjunk az M pont köré ME sugarú kört, legyen ez a k kör. Azt fogjuk megmutatni, hogy az X_1X_2E és Y_1Y_2E körök centrálisa átmegy az M ponton.

Invertáljuk[1] az X_1X_2E kört a k körre, mint alapkörre. Az inverzió definíciója és az (1) összefüggés miatt az E pont képe önmaga, X_1 képe Y_1, X_2 képe pedig Y_2. E transzformáció ismert tulajdonsága, hogy az inverzió pólusán (M pont) át nem menő kör képe a póluson át nem menő kör, tehát az X_1X_2E kört k-ra invertálva az Y_1Y_2E kört kapjuk. A következőkben szükségünk lesz egy segédtételre.

Segédtétel. *Ha a k kört az O pólusú Ω alapkörre invertálva k'-t kapjuk, akkor k és k' centrálisa átmegy O-n.*

Bizonyítás. O-ból húzzunk külső érintőket k-hoz, az érintési pontok legyenek E_1 és E_2. Az érintési pontok F_1 és F_2 képei ekkor az inverzió definíciója miatt az érintők egyenesein lesznek rajta. Ezeken az egyeneseken több pont képe nem lehet, tehát e két egyenes érinti a k' kört F_1-ben és F_2-ben, így a k és k' körök középpontját összekötő egyenes átmegy O-n (*2. ábra*).



2. ábra

A segédtételt alkalmazva kijelenthetjük, hogy az X_1X_2E és Y_1Y_2E körök középpontjait összekötő egyenes (centrális) átmegy az M ponton. Hasonlóképpen belátható, hogy k-ra invertálva az X_1Y_2E kört az X_2Y_1E kört kapjuk, tehát centrálisuk ugyancsak átmegy az M ponton. Így beláttuk azt, hogy az X_1Y_2E és Y_1Y_2E körök centrálisa, valamint az X_1Y_2E és X_2Y_1E körök centrálisa abban az M pontban metszi egymást, amelyik rajta van a k_1 és k_2 körök közös belső érintőjén.

Megjegyzés. A bizonyítás arra az esetre is érvényes, amikor a k_1 és k_2 belülről érintik egymást.

[1] Az **I. 324.** feladat az inverzió bemutatása volt prezentáció segítségével: `http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=I324&l=hu`.