

Megoldás. Mivel $1 + \cos^2 x > \cos^2 x$ nemnegatív számok, ezért

$$\left| \sqrt{1 + \cos^2 x} \right| > \left| \cos^2 x \right|,$$

és ennek következtében

$$\sqrt{1 + \cos^2 x} - \cos x > 0, \quad \text{valamint} \quad \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x > 0.$$

Ekvivalens átalakítás tehát, ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk a pozitív $\sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x$ kifejezéssel. Ekkor az egyenlet:

$$\begin{aligned} (\sqrt{1 + \sin^2 x} - \sin x) (\sqrt{1 + \cos^2 x} - \cos x) (\sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x) &= \\ &= (\sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x), \\ (\sqrt{1 + \sin^2 x} - \sin x) (1 + \cos^2 x - \cos^2 x) &= (\sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x), \\ \sqrt{1 + \sin^2 x} - \sin x &= \sqrt{1 + \cos^2 x} + \cos x. \end{aligned}$$

Ezt rendezve és négyzetre emelve már kaphatunk hamis gyököket is:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \sin^2 x} - \sqrt{1 + \cos^2 x} &= \sin x + \cos x, \\ 1 + \sin^2 x + 1 + \cos^2 x - 2\sqrt{(1 + \sin^2 x)(1 + \cos^2 x)} &= \\ &= \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x, \\ 3 - 2\sqrt{1 + \sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x} &= 1 + 2 \sin x \cos x. \end{aligned}$$

Kettővel osztva és rendezve:

$$1 - \sin x \cos x = \sqrt{2 + \sin^2 x \cos^2 x}.$$

Most ismét négyzetre emelve és rendezve:

$$\begin{aligned} 1 - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x &= 2 + \sin^2 x \cos^2 x, \\ -2 \sin x \cos x &= 1, \\ \sin 2x &= -1. \end{aligned}$$

Innen már adódnak a megoldások:

$$2x = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \quad x_1 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \quad x_2 = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Mindkét megoldást ellenőrizni kell a négyzetre emelések miatt:

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, & \quad \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1, \\ x_2 = \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, & \quad \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Tehát $x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}.$