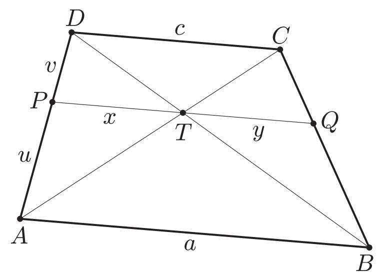
Megoldás. Először megmutatjuk, hogy tetszőleges trapézban az átlók metszéspontján áthaladó, az alapokkal párhuzamos egyenesnek a trapézba eső szakasza a két alap hosszának harmonikus közepével megegyező hosszúságú.



$PT \parallel AB$, ezért a szelőszakaszok tételéből az ABD háromszögben

$$\frac{x}{a} = \frac{v}{u+v},$$

az ACD háromszögből pedig hasonlóan

$$\frac{x}{c} = \frac{u}{u+v}.$$

A két egyenlőséget összeadva:

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{c} = \frac{v}{u+v} + \frac{u}{u+v} = 1.$$

Innen pedig rendezéssel:

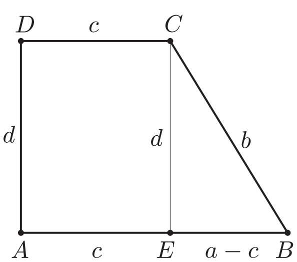
$$x = \frac{ac}{a+c}.$$

Az ABC háromszögben a QT szakaszra ugyanezekkel a lépésekkel szintén azt kapjuk, hogy

$$y = \frac{ac}{a+c}.$$

Tehát

$$PQ = x + y = \frac{2ac}{a+c}.$$



Térjünk rá a feladatban szereplő trapézra. Felhasználjuk Pitagorasz tételét és azt az ismert tényt, hogy érintőnégyszög szemközti oldalainak összege egyenlő: $a + c = b + d$, vagyis $b = a + c - d$. Az eddigieket felhasználva írjuk fel a BEC derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt:

$$d^2 + (a-c)^2 = b^2 = (a+c-d)^2,$$
$$d^2 + a^2 - 2ac + c^2 = a^2 + c^2 + d^2 + 2ac - 2cd - 2ad.$$

Egyszerűsítések és rendezés után

$$ad + cd = 2ac, \qquad d = \frac{2ac}{a+c}.$$

A két számítást összevetve beláttuk, hogy $PQ = AD$.