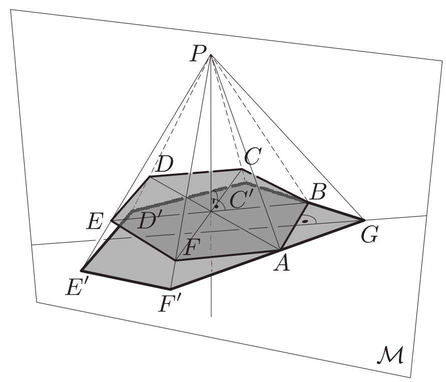
Megoldás. Megmutatjuk, hogy van a feltételeknek megfelelő gúla. „Fordítva” fogunk eljárni, nem a gúlához keresünk jó metszősíkot, hanem egy szabályos hatszöghöz konstruálunk jó gúlát.

Vegyünk fel a térben egy $\mathcal{S}$ síkot és abban egy $ABCDEF$ szabályos hatszöget, továbbá legyen a hatszög középpontján átmenő, $\mathcal{S}$-re merőleges egyenesen P egy $\mathcal{S}$-re nem illeszkedő pont. Legyen $\mathcal{S}'$ egy AB-re illeszkedő, $\mathcal{S}$-től különböző olyan sík, mely által meghatározott két féltér közül az egyik tartalmazza az $ABCDEF$ hatszöget, és metszi a P-ből induló PC, PD, PE és PF félegyenesek mindegyikét, rendre a C', D', E' és F' pontokban. Ilyen sík nyilván végtelen sok létezik, úgy kaphatjuk meg őket, hogy $\mathcal{S}$-et az AB egyenes körül megfelelő irányban forgatjuk (lásd az *ábrát*).



Az AF' és BC' egyenesek definíciójukból következően az AB szakasz $\mathcal{M}$ felezőmerőleges síkjára szimmetrikusan helyezkednek el. Mivel F' nyilván messzebb van $\mathcal{M}$-től, mint A (hiszen már F is messzebb van $\mathcal{M}$-től, mint A), ezért az $F'A$ egyenes nem párhuzamos $\mathcal{M}$-mel. Legyen $G = \mathcal{M} \cap F'A$. Ekkor a szimmetria miatt a $C'B$ egyenes is átmegy G-n. Mivel $F'A$ benne van a $C'D'E'F'$ síkban, ezért G is.

Ekkor a $GC'D'E'F'$ ötszög alapú, P csúcsú gúla eleget tesz a feltételeknek, mert az $\mathcal{S}$ síkkal vett metszete az $ABCDEF$ szabályos hatszög.