I. megoldás. Mivel a háromszög kerülete egységnyi, ezért elegendő azt megmutatnunk, hogy

$$a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{(a+b+c)^2}{2}$$

teljesül. Ezzel ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk a négyzetreemelés elvégzésével és rendezéssel:

$$8abc<2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2.$$

Ismét felhasználva az $a+b+c=1$ egyenlőséget, elegendő megmutatnunk, hogy

$$8abc\cdot 1<\big(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2\big)(a+b+c),$$

azaz

$$\begin{aligned}&0<-a^3-b^3-c^3+a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ac^2-2abc,\\&0<(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).\end{aligned}$$

Ez viszont a háromszög-egyenlőtlenség miatt igaz. Így az eredeti egyenlőtlenség is teljesül, mert ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre.

II. megoldás. Jelölje a háromszög területét T, beírt-, illetve körülírt körének sugarát r és R, kerületét pedig $2s$. Ekkor az ismert összefüggések szerint[1]

$$r=\frac{T}{s}\qquad\text{és}\qquad R=\frac{abc}{4T}. \tag{1}$$

Először megmutatjuk, hogy a háromszög oldalainak ún. *elemi szimmetrikus polinomjai* egyszerűen kifejezhetők r, R és s segítségével, mégpedig a következő módon:

$$\sigma_1(a,b,c)=a+b+c=2s, \tag{2}$$

$$\sigma_2(a,b,c)=ab+bc+ca=s^2+r^2+4rR, \tag{3}$$

$$\sigma_3(a,b,c)=abc=4rRs. \tag{4}$$

A három összefüggés közül (2) nem más, mint s definíciója, (4) pedig azonnal adódik az (1)-beli két képlet összeszorzásából. A (3) egyenlőséget szintén az (1) képleteket felhasználva látjuk be. Ezek alapján azt kell bizonyítanunk, hogy

$$ab+bc+ca=\frac{(a+b+c)^2}{4}+\frac{T^2}{s^2}+\frac{abc}{s}.$$

Ezt rendezve és a területet Héron-képletéből kifejezve:

$$2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2=\frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{a+b+c}+\frac{8abc}{a+b+c}.$$

Vagyis azt kell megmutatnunk, hogy

$$\big(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2\big)(a+b+c)-8abc=(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Ezt viszont már kiszámoltuk az I. megoldás során.

Az elemi szimmetrikus polinomok segítségével bármely szimmetrikus polinom (azaz olyan polinom, melynek változóit tetszőleges módon felcserélve ugyanazt a polinomot kapjuk) kifejezhető. (Ezt nevezik a *szimmetrikus polinomok alaptételének.*) Esetünkben

$$a^2+b^2+c^2+4abc=\big(\sigma_1(a,b,c)\big)^2-2\sigma_2(a,b,c)+4\sigma_3(a,b,c).$$

Feladatunk állításának igazolásához tehát azt kell megmutatnunk, hogy

$$(2s)^2-2\big(s^2+r^2+4rR\big)+4\cdot 4rRs<\frac{1}{2}.$$

Felhasználva, hogy $2s=1$ és a bal oldalon felbontva a zárójeleket, kapjuk, hogy

$$1-\frac{1}{2}-2r^2<\frac{1}{2},$$

ami $r^2>0$ miatt nyilván teljesül.

Tehát a feladat állításában szereplő egyenlőtlenség minden háromszögre fennáll. Megoldásunkból az is látszik, hogy az egyenlőtlenség jobb oldalán az $\frac{1}{2}$ helyett nem írhatunk kisebb számot, mert r^2 tetszőlegesen kicsi lehet.

---

[1] Ezek bizonyítása megtalálható pl. *Kiss Gy.*: Amit jó tudni a háromszögekről, *KöMaL,* **52** (2002), 130–139; `http://www.komal.hu/cikkek/kissgy/haromszogekrol/amitjotudni.h.shtml`.