

I. megoldás. Mivel a felső doboz nem mozdul el az alsón, a két dobozt tekinthetjük egyetlen, $m + M$ tömegű testnek, amely gyorsulva mozog a lejtő mentén lefelé. A két doboz rendszerére a lejtő síkjával párhuzamos irányban hat a nehézségi erő lejtővel párhuzamos komponense, valamint a súrlódási erő. A mozgásegyenlet:

$$(m + M)g \sin \alpha - \mu(m + M)g \cos \alpha = (m + M)a,$$

tehát a gyorsulása:

$$a = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) g.$$

(A feladat szövege szerint a két elengedett doboz *lecsúszik* a lejtőn, tehát $a > 0$, vagyis fennáll, hogy $\mu < \tan \alpha$.)

Írjuk fel most a felső dobozra a Newton-féle mozgásegyenlet lejtővel párhuzamos komponensét! A két doboz között fellépő súrlódási erőt S -sel jelölve és felhasználva a gyorsulás fentebb kiszámított értékét, ezt kapjuk:

$$mg \sin \alpha - S = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

ahonnan a súrlódási erő:

$$S = \mu mg \cos \alpha.$$

Megjegyzés. Jelöljük a két doboz közötti súrlódási tényezőt μ^* -gal! Mivel a felső dobozt az alsóhoz szorító erő $N = mg \cos \alpha$, továbbá tudjuk, hogy a felső doboz nem csúszik az alsón, így fennáll $S < \mu^* N$, vagyis

$$\mu^* > \frac{S}{N} = \frac{\mu mg \cos \alpha}{mg \cos \alpha} = \mu.$$

A feladat szövegében szereplő „elegendően nagy” súrlódás tehát azt jelenti, hogy a két doboz közötti súrlódási együtthatónak nagyobbak kell lennie, mint az alsó doboz és a lejtő közötti súrlódás μ együtthatója.

Foglalkozunk most a felső dobozra ható forgatónyomatékokkal! Amíg a felső doboz nem dől fel, addig a rá ható erők eredő forgatónyomatéka (a doboz tömegközéppontjára vonatkoztatva) zérus:

$$S \cdot \frac{h}{2} - N \cdot x = 0,$$

ahol x a tartóerő hatásvonalának a felső doboz tömegközéppontjától mért távolsága. Innen

$$x = \frac{S}{N} \cdot \frac{h}{2} = \frac{\mu mg \cos \alpha}{mg \cos \alpha} \cdot \frac{h}{2} = \mu \frac{h}{2}.$$

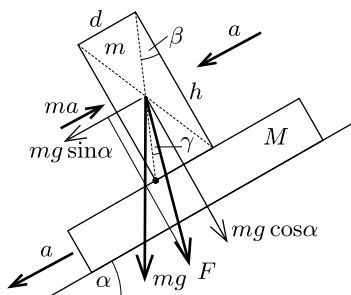
Ez az x távolság azonban nem lehet nagyobb, mint a doboz szélességének fele:

$$x \leq \frac{d}{2}, \quad \text{vagyis} \quad \mu \leq \frac{d}{h}.$$

II. megoldás. Ha az M tömegű doboz a lejtőn nem csúszna, a felső doboz fel nem borulásának feltétele az lenne, hogy a nehézségi erő vektorának hatásvonalja az alátámasztási felületen haladjon át. Az alsó doboz gyorsulása miatt azonban ez a feltétel úgy módosul, hogy nehézségi erő mellett a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben fellépő (látszólagos) tehetetlenségi erőt is figyelembe kell vennünk. Ez az erő ma nagyságú, ahol

$$a = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) g$$

a két doboz közös gyorsulása, és a tehetetlenségi erő hatásvonalja (a nehézségi erőéhez hasonlóan) a felső doboz tömegközéppontján halad keresztül.



A felső dobozra ható nehézségi erő és tehetetlenségi erő F eredője a lejtő irányában

$$F_1 = mg \sin \alpha - ma = \mu mg \cos \alpha,$$

a lejtőre merőlegesen pedig

$$F_2 = mg \cos \alpha$$

nagyságú komponenssel rendelkezik. Ez az erő a felső doboz h hosszúságú oldallapjával γ szöget zár be, ahol

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{F_1}{F_2} = \frac{\mu mg \cos \alpha}{mg \cos \alpha} = \mu.$$

Másrészt a felső doboz tömegközéppontját a bal alsó élével összekötő egyenes a h hosszúságú oldallappal

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{d}{h}$$

szöget zár be. A felső doboz akkor nem borul fel, ha

$$\gamma \leq \beta, \quad \text{vagyis} \quad \operatorname{tg} \gamma = \mu \leq \operatorname{tg} \beta = \frac{d}{h}.$$

Tehát annak szükséges feltétele, hogy a felső doboz ne boruljon fel: $d \geq \mu h$.