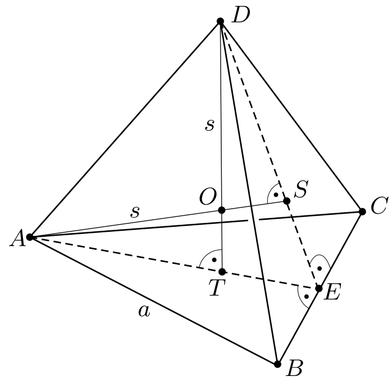
Megoldás. a) Jelöljük az űrhajók kezdeti helyzetét A, B, C és D pontokkal, az ezek alkotta szabályos tetraéder középpontját O-val, a BCD oldal súlypontját S-sel, az ACB oldalét pedig T-vel. A tetraéder szimmetriája miatt az O pont az AS és DT szakaszok metszéspontjában található. Jelölje az ABC háromszög A-ból húzott magasságának talppontját E, ami megegyezik a BCD háromszög D-ből húzott magasságának talppontjával.



Válasszuk ki az A helyzetben lévő űrhajót, és vizsgáljuk meg a rá ható gravitációs erőket! A szimmetria miatt állíthatjuk, hogy az eredő gravitációs erő a tetraéder középpontja felé mutat, a más irányú komponensek kiegyenlítik egymást. Az A és a B pontokban lévő űrhajók közt fellépő gravitációs erő úgy aránylik a középpont felé mutató komponenséhez, mint $AB : AS$.

Jelölje a tetraéder oldalélét a. Ekkor az AE és DE súlyvonalak hossza $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Mivel a súlypont a súlyvonalakat harmadolja, $SE = \frac{1}{3}DE = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Másrészt az ASE háromszög derékszögű, vagyis

$$AS = \sqrt{AE^2 - SE^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{3}{36}}\, a = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a.$$

Ezáltal az általunk keresett arány:

$$\frac{AS}{AB} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Mivel az A pontban lévő űrhajóra 3 másik űrhajó fejt ki gravitációs erőt, ezek eredője:

$$F_{\mathrm{g}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot G\frac{m^2}{a^2} = 65\ \mathrm{mN}.$$

(m az egyes űrhajók tömege, G pedig a Newton-féle gravitációs állandó.)

b) Amennyiben az űrhajók Q nagyságú elektromos töltéssel rendelkeznek, úgy páronként elektrosztatikus taszítóerő hat közöttük. Ha ez az erő éppen megegyezik a páronként fellépő gravitációs vonzóerővel, vagyis ha

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q^2}{a^2} = G\frac{m^2}{a^2},$$

akkor mindegyik testre nulla eredő erő hat, és így a közöttük lévő távolság állandó maradhat. Az ehhez szükséges töltés nagysága:

$$Q = 2m\sqrt{\pi\varepsilon_0 G} = 17\ \mathrm{mC}.$$

c) Ha az űrhajók egyszerre és ugyanakkora nagyságú sebességgel indulnak meg az O pont felé, akkor a későbbiekben is minden pillanatban egy – változó méretű – szabályos tetraéder csúcspontjaiban lesznek. Mivel az előző részben kapott erőegyensúlyi feltétel független az űrhajók távolságától, bármilyen közel kerülnek is egymáshoz a hajók, a közöttük ható gravitációs vonzóerő és az elektrosztatikus taszítóerő mindig kiegyenlíti egymást. Így az űrhajók erőmentesen, egyenletes mozgással haladnának a tetraéder $AO = s$ távol lévő középpontja felé, és ott $t = s/v_0$ idő múlva összeütköznének.

Az összeütközésig eltelő idő meghatározásához ki kell számítanunk az $AO = s$ távolságot. A szimmetria miatt $AS = DT$ és $AO = DO$, ezért

$$OT = DT - DO = AS - AO.$$

Minthogy a T pont is súlypont,

$$AT = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,a = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Így felírhatjuk a Pitagorasz-tételt az AOT háromszögre:

$$s^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,a - s\right)^2 + \frac{1}{3}a^2,$$

ahonnan

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,a.$$

Ezek szerint az összeütközésig eltelő idő:

$$t = \frac{s}{v_0} = \sqrt{\frac{3}{8}}\,\frac{a}{v_0} = 612\ \mathrm{s} \approx 10\ \mathrm{perc}.$$