Megoldás. Az egyenlet ekvivalens átalakításával a bal oldalon két kifejezés szorzatát alakítjuk ki:

$$
\begin{aligned}
4x^2 + 4px &= 4y^2, \\
(2x+p)^2 - p^2 &= 4y^2, \\
(2x+p)^2 - 4y^2 &= p^2, \\
(2x+p+2y)(2x+p-2y) &= p^2.
\end{aligned}
$$

Mivel p prímszám, p^2-nek csak 3 osztója van: 1, p, p^2. Tehát a $2x+p+2y$ és $2x+p-2y$ szorzótényezők mindegyike p, vagy az egyik p^2 és a másik 1. Ha mindkettő p, akkor $2x+p+2y = 2x+p-2y$, amiből $2y = -2y$, vagyis $y = 0$, ezt viszont nem engedik meg a feladat feltételei.

Mivel $2x+p+2y > 2x+p-2y$, így egy lehetőségünk maradt:

$$2x+p+2y = p^2 \quad \text{és} \quad 2x+p-2y = 1.$$

A két egyenletet összeadva: $4x + 2p = p^2 + 1$, amiből $4x = p^2 - 2p + 1 = (p-1)^2$. Tehát $x = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Visszahelyettesítve a $2x+p+2y = p^2$ egyenletbe:

$$2y = p^2 - p - 2x, \quad \text{amiből}$$

$$y = \frac{p\cdot(p-1)}{2} - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{2p^2 - 2p - p^2 + 2p - 1}{4} = \frac{p^2-1}{4} = \frac{(p-1)(p+1)}{4}.$$

Mivel p páratlan prímszám, $p-1$ és $p+1$ is páros szám, így x és y is pozitív egész szám.

Tehát minden p-re pontosan egy pozitív egész megoldást kapunk x-re és y-ra.