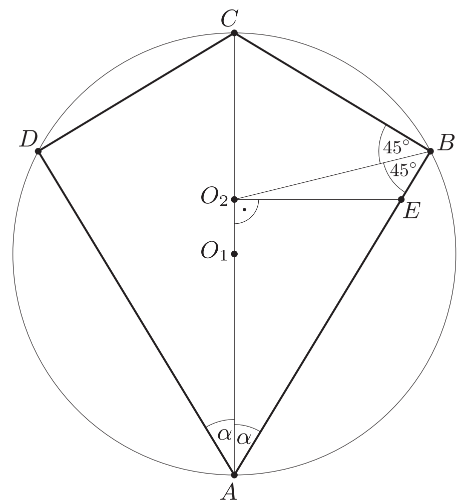
Megoldás. Legyen a szerkesztendő $ABCD$ deltoid szimmetriatengelye az AC átló, jelöljük a deltoid A-nál lévő szögét 2α-val. Mivel a deltoidnak van körülírt köre, ezért szemközti szögeinek összege 180°, tehát a szimmetria miatt B-nél és D-nél lévő szögei derékszögek. Ezért B és D rajta van az AC átló Thalész-körén, ami egyúttal a deltoid körülírt köre is. Ennek O_1 középpontja tehát az AC átló felezőpontja. Jelöljük a deltoid beírt körének középpontját O_2-vel. Ez a pont a deltoid belső szögfelezőinek a metszéspontja, tehát rajta van az AC átlón és

$$ABO_2\sphericalangle = CBO_2\sphericalangle = 45^\circ$$

(lásd az *1. ábrát*).



1. ábra

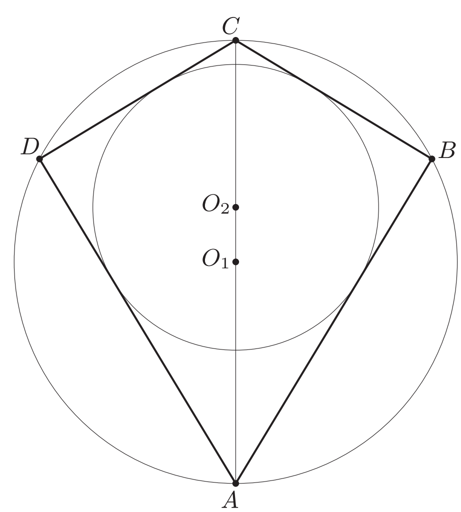
A szögfelezőtétel szerint

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AO_2}{O_2C}. \tag{1}$$

Ha $O_2 \equiv O_1$, akkor $AB = BC$, a szerkesztendő deltoid négyzet, amit AC átlójának ismeretében könnyen megszerkeszthetünk. Ha $O_1O_2 > 0$, akkor A és C szimmetrikus szerepe miatt feltehetjük, hogy $AB > BC$. Jelöljük az O_2-ben AC-re állított merőleges és az AB szakasz metszéspontját E-vel. Ekkor az ABC és AO_2E derékszögű háromszögek hasonlóak, mert A-nál lévő hegyesszögük megegyezik, mindkettőben α. Ezért

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{AO_2}{O_2E},$$

amiből az (1) egyenlőség miatt $O_2C = O_2E$ következik.



2. ábra

Ezek alapján a szerkesztés már egyszerűen elvégezhető. Megrajzoljuk a deltoid O_1 középpontú körülírt körét és kijelöljük egyik átmérőjét, ennek két végpontja A és C. Az O_1C sugárra O_1-ből felmérve az adott O_1O_2 távolságot megkapjuk O_2-t. Az O_2-ben AC-re állított merőlegesre O_2-ből az O_2C távolságot felmérve kapjuk E-t. Az AE egyenes és a körülírt kör A-tól különböző metszéspontja adja B-t, ennek AC-re vonatkozó tükörképe pedig D-t.

Az így szerkesztett $ABCD$ deltoid nyilván eleget tesz a feladat feltételeinek. A feladatnak egy megoldása van, ha O_1O_2 kisebb, mint a deltoid körülírt körének sugara, ha pedig ez nem teljesül, akkor nincs megoldása.