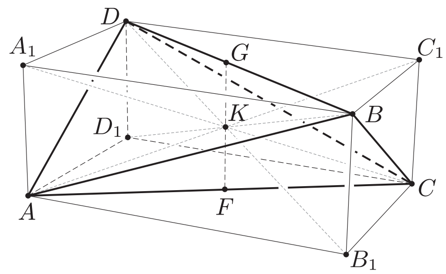
I. megoldás. A megoldás kulcsa az a tény, hogy egy egyenlő oldalú tetraéder körülírt gömbjének K középpontja egybeesik a tetraéder S súlypontjával.

Tekintsük az egyenlő oldalú tetraéderünk $AB_1CD_1A_1BC_1D$ bennfoglaló paralelepipedonját (*1. ábra*). Mivel a szemközti paralelogrammalapok nem megfelelő átlói egyenlők, ezért minden lapja téglalap, vagyis igazából téglatestet adtunk meg. Ekkor K éppen a téglatest köré írt gömb középpontja, hisz ez a gömb A, B, C, D-t tartalmazza. Továbbá S az AC oldal F felezőpontját (AB_1CD_1 középpontját) és a BD oldal G felezőpontját (A_1BC_1D középpontját) összekötő szakasz felezőpontja. Mindkettő definíció a téglatest középpontját adja meg, ezért $K = S$.



1. ábra

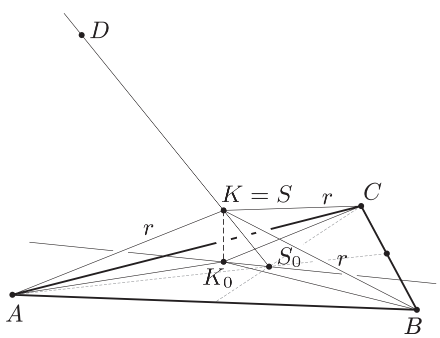
Legyen S_0 az ABC háromszög súlypontja. A tetraéder geometriájából ismert, hogy S a DS_0 súlyvonal S_0-hoz közelebbi negyedelőpontja. Legyen Kmerőleges vetülete az ABC síkra K_0, akkor az

$$AK_0K, \quad BK_0K, \quad CK_0K$$

háromszögek egybevágóak, hiszen derékszögű háromszögek, melyeknek átfogója (r) és K_0K befogója megegyezik, emiatt

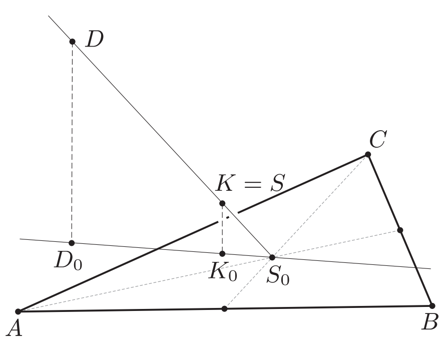
$$K_0A = K_0B = K_0C,$$

vagyis K_0 az ABC háromszög köré írt kör középpontja (*2. ábra*).



2. ábra

Tekintsük az S_0 középpontú 4-szeres nagyítást. Ezzel a transzformációval, mint tudjuk, S képe D lesz, s eközben K_0 (az $S = K$ pont vetülete az ABC síkon) a D pont vetületébe, D_0-ba képződik (*3. ábra*).

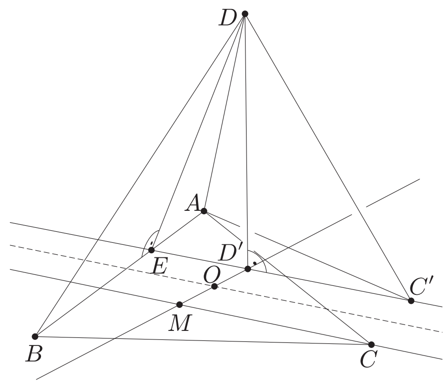


3. ábra

Ezzel megkaptuk, hogy a D pont merőleges vetülete, vagyis a tetraéder D-ből induló magasságának talppontja az ABC háromszög S_0K_0 Euler-vonalára illeszkedik.

Megjegyzés. A feladat kitűzése, így a megoldás is feltételezi, hogy az ABC háromszögnek van Euler-vonala, azaz $S_0 \neq K_0$. Ismert, hogy ez pontosan akkor áll fenn, ha ABC háromszög nem szabályos. Vagyis a feladat állítása és a bizonyítás csakis nem szabályos, egyenlő oldalú tetraéderekre érvényes. (Szabályos tetraéderben D vetülete ABC-re éppen S_0= K_0.)

II. megoldás. Jelöljük az ABC háromszög magasságpontját M-mel, a köréírt körének középpontját O-val, és a D-ből induló magasság talppontját D'-vel (*4. ábra*). Tükrözzük C-t az AB szakasz ABC síkban lévő felező merőleges egyenesére, ami áthalad az O ponton, a tükörképe legyen C'. A tükrözés miatt $AC = BC'$ és $BC = AC'$. A tetraéder egyenlő oldalú, ezért $AC = BD$ és $BC = AD$. Ekkor $AC' = AD$ és $BC' = BD$, ezért az $ABD\triangle \cong ABC'\triangle$, vagyis D és C' rajta van az AB szakaszra és ABC síkra merőleges $C'DE$ síkon. Ebben a síkban fut a tetraéder DD' magassága, ezért D' rajta van a $C'E$ egyenesen, ami az ABC háromszög CM magasságának O pontra vett tükörképe. Hasonlóan belátható, hogy D' pont rajta van az ABC háromszög többi magasságának O-ra való tükörképén is, ezért a D' pont M tükörképe O-ra. M és O rajta van az Euler-egyenesen, ezért D' is.



4. ábra