Megoldás. Jelöljük a kiskocsi kezdősebességének nagyságát v-vel, állandó gyorsulását a-val, a mozgás teljes idejét pedig T-vel. Legyen $t = 1$ s, ami az utolsó másodperc idejét jelöli. A feladat szövegéből nem derül ki, hogy a kocsit lefelé vagy felfelé löktük meg, ezért több esetet is meg kell vizsgálnunk.

I. eset. *A kiskocsit lefelé löktük meg.*

A mozgás teljes ideje alatt megtett út:

$$s = vT + \frac{a}{2}T^2.$$

A kocsi a mozgás utolsó, t időtartamú részében tette meg az útjának felét, így a mozgás kezdeti, $T-t$ hosszú szakaszában is az út felét tette meg:

$$\frac{s}{2} = v(T-t) + \frac{a}{2}(T-t)^2.$$

A két egyenletből algebrai átalakítások után kapjuk, hogy

$$\frac{T}{t} = 2 - \frac{v}{at} + \sqrt{\left(\frac{v}{at}\right)^2 + 2}.$$

Látható, hogy érdemes bevezetni a $\lambda = v/(at) \geq 0$ dimenziótlan mennyiséget, és ennek függvényében vizsgálni a $T(\lambda)$ időt, keresni annak maximumát. Mivel az

$$f(\lambda) = 2 - \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2}$$

függvény monoton csökkenő (ezt grafikus ábrázolással vagy differenciálszámítással láthatjuk be), $T(\lambda)$ maximális értéke

$$T_{\max}^{(\mathrm{I})} = \left(2 + \sqrt{2}\right)t \approx 3{,}4 \text{ s}.$$

II. eset. *A kiskocsit felfelé löktük meg, és még a lassulása közben állítottuk meg.*

A megadott feltétel szerint

$$\frac{1}{2}\left[vT - \frac{a}{2}T^2\right] = v(T-t) - \frac{a}{2}(T-t)^2, \quad v > aT.$$

Innen (a korábbi jelöléssel)

$$\frac{T}{t} = \lambda + 2 - \sqrt{\lambda^2 + 2},$$

és a megállásra vonatkozó feltétel szerint $\lambda > \sqrt{2}$. Mivel $T(\lambda)$ monoton növekvő függvény, maximuma nincs, csak határértéke (ami egyben a felső korlátja):

$$T^{(\mathrm{II})} < 2t = 2 \text{ s},$$

és a felső korlátot akkor közelíti meg T, ha $\lambda \gg 1$, vagyis a kezdősebesség nagyon nagy.

III. eset. *A kiskocsit felfelé löktük meg, de nem túl nagy kezdősebességgel. A kocsi egy idő után megáll, majd a mozgásának végén, annak t időtartama alatt már gyorsulva mozog lefelé a lejtőn.*

A kiskocsi az indítás után $T_0 = v/a$ idő múlva áll meg, ezalatt

$$s_1 = \frac{v^2}{2a}$$

utat tesz meg felfelé. Utána $T - t - (v/a)$ ideig mozogva lefelé még megtesz

$$s_2 = \frac{a}{2}\left(T - t - \frac{v}{a}\right)^2$$

utat, majd a mozgás utolsó t idejében

$$s_3 = \frac{a}{2}\left(T - \frac{v}{a}\right)^2 - \frac{a}{2}\left(T - t - \frac{v}{a}\right)^2$$

utat. Az $s_1 + s_2 = s_3$ feltételből – algebrai átalakítások után – a mozgás teljes idejére a

$$T(\lambda) = \left[2 + \lambda + \sqrt{2 - \lambda^2}\right]t$$

képletet kapjuk. Ennek a függvénynek $\lambda = 1$-nél van maximuma, és

$$T_{\max}^{(\mathrm{III})} = 4t = 4 \text{ s}.$$

Ha az utak közötti kapcsolatot leíró egyenletet nem T-re, hanem λ-ra oldjuk meg, ezt kapjuk:

$$\lambda = \frac{T - 2t \pm \sqrt{T(4t - T)}}{2t}.$$

Látható, hogy teljesülnie kell a $T \leq 4t = 4$ s feltételnek, és ha $T = 4t$, akkor $\lambda = 1$.

Megjegyzés. Ha például a kezdősebesség $v = 1$ m/s, és a lejtő hajlásszögét úgy állítjuk be, hogy a gyorsulás 1 m/s^2 nagyságú legyen, akkor a kiskocsi a mozgásának első másodpercében felfelé mozog a lejtőn, és 0,5 méter utat tesz meg. A második másodpercben lefelé 0,5 métert, a harmadikban 1,5 métert, a negyedikben pedig 2,5 métert gurul lefelé. Látható, hogy teljesül a feladat követelménye:

$$\frac{0{,}5 + 0{,}5 + 1{,}5 + 2{,}5}{2}\ \mathrm{m} = 2{,}5\ \mathrm{m}.$$

IV. eset. *A kiskocsit felfelé löktük meg, méghozzá úgy, hogy a visszafordulásának pillanata a mozgás utolsó t időtartamára esik.*

Az előző három esethez hasonló vizsgálódással beláthatjuk, hogy a mozgás teljes ideje ilyenkor legfeljebb $2t = 2$ s lehet, és ez a határeset akkor valósul meg, ha a kiskocsi t ideig mozog felfelé, majd ugyanennyit lefelé.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a kiskocsi mozgása legfeljebb 4 másodpercig tarthat. Ilyen időtartamú lesz a mozgás, ha a kocsit a lejtőn felfelé indítjuk el úgy, hogy a kezdősebesség és a gyorsulás hányadosa éppen 1 másodperc legyen.