I. megoldás. Jelölje x a 777 fejű sárkány 9 fejű nyakainak számát, és y a 13 fejű nyakainak számát. Ekkor $9x+13y=777$, ahol $x,y\in N$.

Nyilván $13y\le 777$, amiből $y\le \left[\frac{777}{13}\right]=59$. Tehát $0\le y\le 59$.

$13y=777-9x=3(259-3x)$. Mivel $3\mid 3(259-3x)$, ezért $3\mid 13y$, vagyis $(13,3)=1$ miatt $3\mid y$.

259 nem osztható 3-mal, ezért 9 nem osztója $3(259-3x)$-nek, és így $13y$-nak sem, ezért y-nak sem. Vagyis y csak $9k+3$ vagy $9k+6$ alakú lehet.

1. eset: $y=9k+3\le 59$, azaz $0\le k\le 6$.

$$9x+13(9k+3)=777,\quad 9x+13\cdot 9k=738,\quad x+13k=82,\quad x=82-13k.$$

Ez minden $0\le k\le 6$ esetén pozitív szám.

Így a 9 fejű és 13 fejű nyakakra vonatkozó lehetséges $(x;y)$ számpárok:

$$(82;3),\quad (69;12),\quad (56;21),\quad (43;30),\quad (30;39),\quad (17;48)\ \text{ és }\ (4;57).$$

2. eset: $y=9l+6\le 59$, azaz $0\le l\le 5$.

$$9x+13(9l+6)=777,\quad 9x+13\cdot 9l=699.$$

A bal oldal osztható 9-cel, a jobb oldal viszont nem, ez ellentmondás, így ez az eset nem ad megoldást.

Tehát összesen hét különböző 777 fejű sárkány létezik.

II. megoldás. Legyen a 9-fejű nyakak száma a, a 13-fejű nyakak száma b.

Ekkor teljesül a következő összefüggés: $9a+13b=777$, amiből

$$a=\frac{777-13b}{9}=86-b+\frac{3-4b}{9}.$$

Az a és b értéke akkor megfelelő, ha mindkét oldal egész szám és pozitív; ebből egyelőre csak az előbbi követelménnyel foglalkozunk. Ez pontosan akkor teljesül, ha b is és $\frac{3-4b}{9}=x$ is egész, azaz $4b+9x=3$, vagyis $b=\frac{3-9x}{4}=-2x+\frac{3-x}{4}$. Ez akkor és csak akkor egész, ha tetszőleges y egésszel $3-x=4y$, vagyis $x=3-4y$. Ez azt jelenti, hogy

$$b=-2(3-4y)+y=-6+9y\quad\text{és}\quad a=86-(-6+9y)+(3-4y)=95-13y.$$

Szükséges még, hogy a és b egyike se legyen negatív: $a=95-13y\ge 0$, azaz $y\le 7$, valamint $b=-6+9y\ge 0$, vagyis $y\ge 1$. Így $y=1,2,3,4,5,6,7$ lehet, tehát 7 különböző értékpár adódott $(a;b)$-re, ennyi különböző 777 fejű sárkány van.