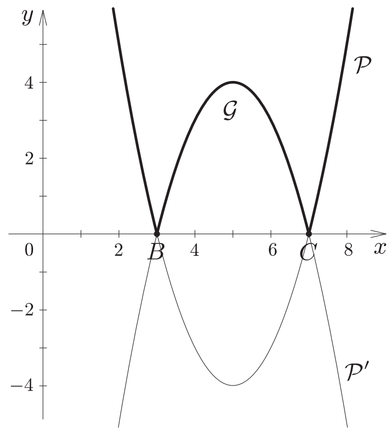
I. megoldás. A feladatot grafikusan oldjuk meg. Derékszögű koordinátarendszerben ábrázoljuk az $Y = mX + 4$ és az $Y = \left|X^2 - 10X + 21\right|$ függvényeket. A két görbe közös pontjainak a száma adja az eredeti egyenlet megoldásainak számát.

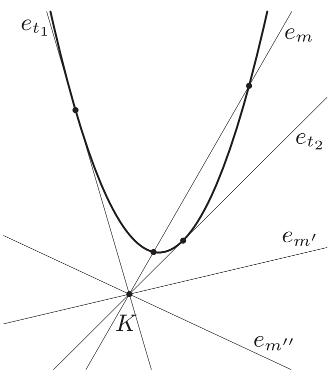
Az $Y = mX + 4$ egy egyenes egyenlete. Jelöljük ezt az egyenest e_m-mel. Ha $X = 0$, akkor $Y = 4$, ezért e_m mindig átmegy a koordinátarendszer $A = (0; 4)$ pontján. Az egyenes meredeksége az m értékétől függ, s tekinthetjük úgy, hogy ha m-et változtatjuk, akkor e_m az A körül forog.

Az $Y = X^2 - 10X + 21$ függvény képe egy olyan felfelé nyíló $\mathcal{P}$ parabola, mely a $B = (3; 0)$ és a $C = (7; 0)$ pontokban metszi az x tengelyt (mert az $x^2 - 10x + 21 = 0$ egyenlet gyökei 3 és 7). Ezért az $Y = \left|X^2 - 10X + 21\right|$ függvény $\mathcal{G}$ képét úgy kapjuk, hogy $x \le 3$, valamint $7 \le x$ esetén tekintjük $\mathcal{P}$ megfelelő íveit, ha pedig $3 < x < 7$, akkor $\mathcal{P}$-nek az x-tengelyre vonatkozó $\mathcal{P}'$ tükörképét, ami éppen az $Y = -\left(X^2 - 10X + 21\right)$ egyenletű parabola megfelelő íve (*1. ábra*). Azt kell tehát meghatároznunk, hogy az e_m egyenesnek hány közös pontja van a két parabola darabjaiból összerakott görbével.



1. ábra

Tudjuk, hogy egy külső K pontból egy parabolához két érintő húzható (lásd pl. *Kiss Gy.:* Amit jó tudni a kúpszeletekről I. és II., *KöMaL* **54** (2004), 450–459. és 514–518. o.; `http://www.komal.hu/cikkek/2004-11/kupszeletek1.h.shtml`). Ha a koordinátarendszerben egy parabola tengelye függőleges, akkor a K-n átmenő egyenesek közül a függőlegesnek egy közös pontja van a parabolával, ha pedig a K-ból a parabolához húzott érintők meredeksége $t_1 < t_2$, akkor a K-n átmenő m meredekségű egyeneseknek $t_1 < m < t_2$ esetén nincs, $m < t_1$ és $t_2 < m$ esetén pedig pontosan két közös pontjuk van a parabolával (*2. ábra*).



$m'' < t_1 < m < t_2 < m'$

2. ábra

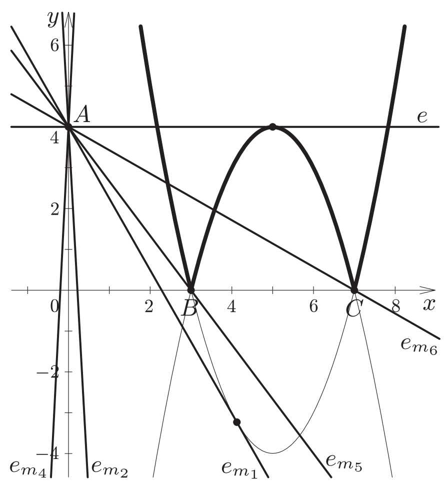
Határozzuk meg az A-ból $\mathcal{P}$-hez húzható érintők meredekségét. Az e_m egyenes akkor érintő, ha az

$$mx + 4 = x^2 - 10x + 21, \quad \text{azaz} \quad x^2 - (10 + m)x + 17 = 0$$

egyenletnek egy megoldása van. Ez pontosan akkor teljesül, ha az egyenlet diszkriminánsa 0, vagyis ha

$$(10 + m)^2 - 4 \cdot 17 = 0, \quad \text{azaz}$$
$$m^2 + 20m + 32 = 0,$$

amiből kapjuk, hogy $m_{1,2} = -10 \pm \sqrt{68}$. Ugyanígy kapjuk, hogy az A-ból $\mathcal{P}'$-höz húzható érintők meredeksége $m_3 = 0$ és $m_4 = 20$. A metszéspontok számának meghatározásához még szükségünk van az AB és AC egyenesek meredekségére, ami a pontok koordinátáiból könnyen adódik, AB esetén $m_5 = (0 - 4)/(3 - 0) = -4/3$, AC esetén pedig $m_6 = (0 - 4)/(7 - 0) = -4/7$ (*3. ábra*).



3. ábra

Ezek után az $mX + 4 = \left|X^2 - 10X + 21\right|$ egyenlet megoldásainak számát leolvashatjuk a 3. ábráról.

- Ha $m < -10 - \sqrt{68}$, akkor 2 megoldás van, mert e_m két-két pontban metszi $\mathcal{P}$-t is és $\mathcal{P}'$-t is, de a négy metszéspont közül csak kettő tartozik $\mathcal{G}$-hez, mert a $\mathcal{P}'$-vel vett metszéspontok az x tengely alatt vannak.
- Ha $m = -10 - \sqrt{68}$, akkor 1 megoldás van, mert e_m érinti $\mathcal{P}$-t és két pontban metszi $\mathcal{P}'$-t, de e két utóbbi pont nem tartozik $\mathcal{G}$-hez, mert az x tengely alatt vannak.
- Ha $-10 - \sqrt{68} < m < -4/3$, akkor a megoldások száma 0, mert e_m és $\mathcal{P}$ valamennyi (nulla, egy, vagy kettő) metszéspontja, továbbá e_m és $\mathcal{P}'$ két metszéspontja is az x tengely alatt van, ezért nem tartozik $\mathcal{G}$-hez.
- Ha $m = -4/3$, akkor 1 megoldás van, mert e_m két-két pontban metszi $\mathcal{P}$-t is és $\mathcal{P}'$-t is, de a négy metszéspont közül kettő egybeesik B-vel, a másik kettő pedig nem tartozik $\mathcal{G}$-hez, mert az x tengely alatt van.
- Ha $-4/3 < m < -4/7$, akkor 2 megoldás van, mert e_m két-két pontban metszi $\mathcal{P}$-t is és $\mathcal{P}'$-t is, de a metszéspontok közül csak egy-egy tartozik $\mathcal{G}$-hez, mert a másik két pont az x tengely alatt van.
- Ha $m = -4/7$, akkor 3 megoldás van, mert e_m két-két $\mathcal{G}$-hez tartozó pontban metszi $\mathcal{P}$-t is és $\mathcal{P}'$-t is, de a négy metszéspont közül kettő egybeesik C-vel.
- Ha $-4/7 < m < 0$, akkor 4 megoldás van, mert e_m két-két pontban metszi $\mathcal{P}$-t is és $\mathcal{P}'$-t is, és a metszéspontok mindegyike $\mathcal{G}$-hez tartozik.
- Ha $m = 0$, akkor 3 megoldás van, mert e_m két pontban metszi $\mathcal{P}$-t és érinti $\mathcal{P}'$-t, és a közös pontok mindegyike $\mathcal{G}$-hez tartozik.
- Ha $0 < m$, akkor 2 megoldás van, mert e_m két $\mathcal{G}$-hez tartozó pontban metszi $\mathcal{P}$-t, a $\mathcal{P}'$-vel közös pontjai (nulla, egy vagy kettő, attól függően, hogy $m < 20$, $m = 20$ vagy $m > 20$) pedig az x tengely alatt vannak, ezért nem tartoznak $\mathcal{G}$-hez.

II. megoldás. Az abszolútérték definiciója szerint $X^2 - 10X + 21 \ge 0$ esetén az $mX + 4 = X^2 - 10X + 21$, míg $X^2 - 10X + 21 < 0$ esetén az $mX + 4 = -\left(X^2 - 10X + 21\right)$ egyenletet kell megoldanunk.

1. eset. Ha $X^2 - 10X + 21 \ge 0$, akkor $X \ge 7$ vagy $X \le 3$. Vizsgáljuk meg, hogy az $X^2 - (m + 10)X + 17 = 0$ egyenlet megoldásai milyen m értékek esetén esnek a megadott tartományokba. A megoldóképlet alapján a gyökök

$$X_1 = \frac{m + 10 + \sqrt{m^2 + 20m + 32}}{2} \quad \text{és} \quad X_2 = \frac{m + 10 - \sqrt{m^2 + 20m + 32}}{2}.$$

Tehát csak akkor vannak valós gyökök, ha $m^2 + 20m + 32 \ge 0$, azaz ha $m \le -10 - \sqrt{68}$ vagy $-10 + \sqrt{68} \le m$ teljesül.

Ha $X_1 \ge 7$, akkor ezt átrendezve kapjuk, hogy $\sqrt{m^2 + 20m + 32} \ge 4 - m$. Ha $4 - m \ge 0$, akkor a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás. Rendezés után $m \ge -\frac{4}{7}$ következik. Összevonva a feltétellel: $4 \ge m \ge -\frac{4}{7}$. Ha $m > 4$, akkor a diszkrimináns nemnegatív, $4 - m < 0$, tehát az egyenlőtlenség teljesül. Vagyis összegezve: $m \ge -\frac{4}{7}$. Ha $X_1 \le 3$, akkor ezt átrendezve kapjuk, hogy $\sqrt{m^2 + 20m + 32} \le -4 - m$, ami csak akkor teljesülhet, ha $-4 \ge m$. Továbbá a $m^2 + 20m + 32 \ge 0$ egyenlőtlenségnek is fenn kell állnia, ezért $m \le -10 - \sqrt{68}$. Ekkor négyzetreemelés és rendezés után kapjuk, hogy $m \le -4/3$, tehát az $X_1 \le 3$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $m \le -10 - \sqrt{68}$.

Ha $X_2 \geq 7$, akkor ezt átrendezve kapjuk, hogy $m-4 \geq \sqrt{m^2+20m+32}$, amiből négyzetreemelés és újabb rendezés után $m \leq -4/7$ következik. Ha ez teljesül, akkor $m-4<0$, ezért a négyzetreemelés nem volt ekvivalens átalakítás, az eredeti egyenlőtlenség nem áll fenn. Tehát $X_2 \geq 7$ soha nem teljesül. Ha $X_2 \leq 3$, akkor ezt átrendezve kapjuk, hogy $m+4 \leq \sqrt{m^2+20m+32}$. Ez $m \leq -10-\sqrt{68}$ esetén nyilván teljesül, ha pedig $-10+\sqrt{68} \leq m$, akkor négyzetreemelés és rendezés után kapjuk, hogy $m \geq -4/3$. Ekkor a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás, az eredeti egyenlőtlenség is fennáll.

2. eset. Ha $X^2-10X+21<0$, akkor a $3<X<7$ egyenlőtlenségeknek kell teljesülni. Ebben az esetben az $X^2+(m-10)X+25=0$ egyenletet kell megoldanunk, aminek gyökei

$$X_3=\frac{-m+10+\sqrt{m^2-20m}}{2} \quad \text{és} \quad X_4=\frac{-m+10-\sqrt{m^2-20m}}{2}.$$

Csak akkor vannak valós gyökök, ha $m^2-20m \geq 0$, azaz ha $m \leq 0$ vagy $20 \leq m$ teljesül.

Ha $3<X_3<7$, akkor ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$m-4<\sqrt{m^2-20m}<m+4.$$

Ha $m \leq 0$, akkor a bal oldali egyenlőtlenség nyilván teljesül, a jobb oldaliból pedig négyzetreemelés és újabb rendezés után $m>-4/7$ következik. Ha ez teljesül, akkor $m+4>0$, ezért a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás, az eredeti egyenlőtlenség is fennáll. Ha $m \geq 20$, akkor négyzetreemelés és rendezés után a bal oldali egyenlőtlenségből $m<-4/3$ adódik, tehát ez az egyenlőtlenség nem állhat fenn.

Ha $3<X_4<7$, akkor ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$\sqrt{m^2-20m}<-m+4 \quad \text{és} \quad -m-4<\sqrt{m^2-20m}.$$

Ha $m \leq 0$, akkor az első egyenlőtlenségből négyzetreemelés és újabb rendezés után $m>-4/3$ következik. Ha ez teljesül, akkor $m+4>0$, ezért a négyzetreemelés ekvivalens átalakítás, az eredeti egyenlőtlenség is fennáll, a második egyenlőtlenség pedig nyilván teljesül, ha $-4/3<m \leq 0$. Ha $m \geq 20$, akkor az első egyenlőtlenség jobb oldalán negatív szám áll, tehát ekkor nem teljesülhet az egyenlőtlenség.

A kapott eredményeinket a következő táblázatban foglalhatjuk össze:

m értéke	megoldások száma
$m<-10-\sqrt{68}$	2
$m=-10-\sqrt{68}$	1
$-10-\sqrt{68}<m<-\frac{4}{3}$	0
$m=-\frac{4}{3}$	1
$-\frac{4}{3}<m<-\frac{4}{7}$	2
$m=-\frac{4}{7}$	3
$-\frac{4}{7}<m<0$	4
$m=0$	3
$0<m$	2