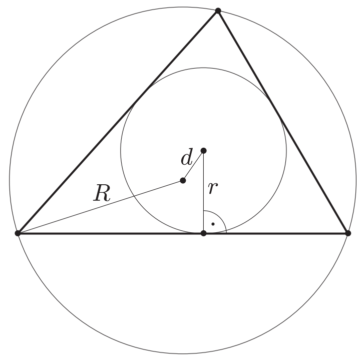
I. megoldás. Induljunk ki a feltételből és alakítsuk át, majd ismét használjuk fel az eredeti feltételt. Így kapjuk, hogy:

$$R < r(\sqrt{2}+1), \quad R^2 < Rr(\sqrt{2}+1),$$
$$R^2 - 2Rr < Rr(\sqrt{2}-1) < r(\sqrt{2}+1)\cdot r(\sqrt{2}-1) = r^2.$$



Euler tétele szerint, ha d jelöli a háromszög beírható köre és körülírt köre középpontjának a távolságát, akkor

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Feltételünkből tehát $d^2 < r^2$, azaz $d < r$ következik.

A két kör középpontjának a távolsága kisebb, mint a beírt kör sugara, ezért a körülírt kör középpontja a beírt kör belsejében, s így a háromszög belsejében van. Viszont egy háromszög körülírt körének középpontja pontosan akkor van a háromszög belsejében, ha a háromszög hegyesszögű. Tehát a $R < r(\sqrt{2}+1)$ feltételből következik, hogy a háromszög hegyesszögű.

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy ha egy háromszögben teljesül az eredeti feltétel átalakításával kapott, azzal ekvivalens

$$\frac{r}{R} + 1 > \frac{1}{\sqrt{2}+1} + 1 = \sqrt{2}$$

egyenlőtlenség, akkor a háromszög hegyesszögű.

Jelölje a háromszög szögeit α, β és γ. Tudjuk, hogy

$$\frac{r}{R} + 1 = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$$

(ennek bizonyítását lásd a megoldás utáni megjegyzésben). Ezért elég azt megmutatnunk, hogy ha a háromszög nem hegyesszögű, akkor

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \sqrt{2}.$$

Feltehetjük, hogy γ a legnagyobb szög. Ekkor $\gamma \ge 90^\circ$, és ezért $\alpha + \beta \le 90^\circ$, továbbá $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$. Tehát azt kell belátnunk, hogy

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) \le \sqrt{2}.$$

A koszinuszok összegére vonatkozó képletet alkalmazva, felhasználva, hogy $0 < \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \le 1$, végül pedig a kétszeres szög koszinuszának képletét használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos(\alpha+\beta)\\ &\le 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1.\end{aligned}$$

Bevezetve a $\delta = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ jelölést azt kell tehát megmutatnunk, hogy ha $0^\circ \le \delta \le 45^\circ$, azaz $1 \ge \cos\delta \ge \sqrt{2}/2$, akkor

$$2\cos\delta - 2\cos^2\delta + 1 \le \sqrt{2}.$$

Ez rendezés és teljes négyzetté kiegészítés után ekvivalens a

$$0 \le \left(\cos\delta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\sqrt{2}-3}{4}$$

egyenlőtlenséggel. A $\cos\delta$-ra vonatkozó feltétel miatt itt a jobb oldal akkor a legkisebb, ha $\cos\delta = \sqrt{2}/2$, s értéke ekkor 0. Vagyis az egyenlőtlenség mindig fennáll, ami bizonyítja állításunkat.

Megjegyzés. Ha a háromszög oldalait a szokásos módon a, b és c, kerületét $2s$, területét pedig T jelöli, akkor az ismert $r = \dfrac{T}{s}$ és $R = \dfrac{abc}{4T}$ összefüggéseket és Héron képletét felhasználva kapjuk, hogy

$$(1)\qquad \frac{r}{R} + 1 = \frac{4T^2}{sabc} + 1 = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) + 2abc}{2abc}.$$

A szögek koszinuszait a koszinusztételből kifejezve majd közös nevezőre hozva pedig azt kapjuk, hogy

$$(2)\qquad \begin{aligned} \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \\ &= \frac{-a^3-b^3-c^3+ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2}{2abc}. \end{aligned}$$

Ezután egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy az (1) és (2) egyenlőségek jobb oldalán álló kifejezések megegyeznek, ami bizonyítja a feladat megoldásában felhasznált azonosságot.