

**I. megoldás.** Középiskolában rendszeresen előforduló feladat a következő: konvex szögtartomány tetszőleges  $P$  belső pontján keresztül húzható olyan egyenes, amelynek szögszárak közé eső szakaszát az adott  $P$  pont felezi. A megoldáshoz középpontosan tükrözni kell az egyik szögszárat az adott  $P$  pontra. A konvexitás miatt a tükrözött félegyenes metszi a másik szögszárat. Ez a pont lesz az egyik szakaszcélpont. Ezt a pontot a  $P$ -vel összekötve kapjuk a megfelelő egyenest.

Az előbbi eredmény felhasználásával tekintsük a négyoldalú konvex térszöglet két-két szemben lévő félegyenesét által meghatározott szögtartományokat, továbbá ezek metszetét, ami egy félegyenes. Ezt követően vegyünk ennek a metszészonalnak a tartományba eső félegyenesén egy tetszőleges  $K$  pontot, amely a paralelogramma középpontja lesz. Most használjuk fel az előbb idézett feladat eredményét, hogy konvex szögtartományban bármely ponthoz lehet úgy egy szakasz húzni, hogy a szakasz végpontjai a szárokon vannak, s a szakasz felezőpontja az adott pont. Ezt végezzük el a  $K$  ponttal és a két szögtartománnyal. Így keletkezik négy olyan pont, ami két metsző egyenesen helyezkedik el, tehát egy síkban van, és a négyszög átlói felezik is egymást, tehát valóban egy paralelogrammát kapunk.

**II. megoldás.** Tekintsünk egy tetszőleges konvex testszögletet. Legyen a csúcsa  $P$ . Induljanak  $P$ -ből az  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  egységvektorok, melyek rendre a  $P$ -ből induló élre illeszkednek, körüljárásuk egyik sorrendjében.

Legyen  $\alpha$  tetszőleges pozitív valós szám. Ismert, hogy a tér bármely vektora (egyértelműen) előállítható három nem komplanáris vektor lineáris kombinációjaként. A  $\vec{b}$ ,  $\vec{d}$  és  $-\vec{c}$  vektorok nem komplanárisak, így léteznek olyan  $\beta$ ,  $\gamma$  és  $\delta$  valós számok, hogy  $\alpha\vec{a} = \beta\vec{b} + \delta\vec{d} + \gamma(-\vec{c})$ . Ekkor  $\gamma\vec{c} - \delta\vec{d} = \beta\vec{b} - \alpha\vec{a}$ . Az egyenlet két oldalán lévő vektorok párhuzamosak egymással, hiszen egyenlőek, valamint kezdő és végpontjaik a négy „élen” vannak ( $\beta$ ,  $\gamma$  és  $\delta$  pozitívak, hiszen a konvexitás miatt  $\alpha\vec{a}$  végpontja a  $\vec{b}$ ,  $\vec{d}$  és  $-\vec{c}$  vektorok által kifeszített térrészben van), így a rájuk illeszkedő sík paralelogrammát metsz ki a testszögletből.