Megoldás. Válasszuk meg $f(1)$ értékét tetszőleges, 0-tól különböző valós számnak (egyébként a lépések során 0-val osztanánk): legyen $f(1)=a$, ahol $a\neq 0$. Az összefüggés alapján kiszámolhatjuk f első néhány értékét:

$$f(1)=a,\quad f(2)=(p+1)\cdot a,\quad f(3)=\frac{(p+1)(p+2)}{2}\cdot a,$$
$$f(4)=\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}\cdot a.$$

Ezek alapján azt sejtjük, hogy ha $n\geq 2$, akkor

$$f(n)=\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)}{(n-1)!}\cdot a=\frac{(p+n-1)!}{p!(n-1)!}\cdot a=\binom{p+n-1}{p}a.$$

Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk. Láthattuk, hogy $n=2,3,4$-re igaz. Tegyük fel, hogy n-ig igaz, és bizonyítsunk $n+1$-re. Feltételünk szerint:

$$\frac{p}{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}=\frac{p+1}{f(n)}-\frac{p+1}{f(n+1)},$$

ebbe írjuk be az indukciós feltevésünket ($f(1)$-et $\binom{p}{p}a$-ként írva):

$$\frac{p}{\binom{p}{p}a+\binom{p+1}{p}a+\ldots+\binom{p+n-1}{p}a}=\frac{p+1}{\binom{p+n-1}{p}a}-\frac{p+1}{f(n+1)}.$$

Alkalmazzuk az ismert

$$\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}+\ldots+\binom{p+n-1}{p}=\binom{p+n}{p+1}$$

összefüggést: Ezt beírva:

$$\frac{p}{\binom{p+n}{p+1}a}=\frac{p+1}{\binom{p+n-1}{p}a}-\frac{p+1}{f(n+1)},$$
$$\frac{p+1}{f(n+1)}=\frac{p+1}{\binom{p+n-1}{p}a}-\frac{p}{\binom{p+n}{p+1}a}=\frac{(p+1)p!(n-1)!}{(p+n-1)!a}-\frac{p(p+1)!(n-1)!}{(p+n)!a}=$$
$$=\frac{(p+n)(p+1)!(n-1)!-p(p+1)!(n-1)!}{(p+n)!a}=$$
$$=\frac{n(p+1)!(n-1)!}{(p+n)!a}=\frac{(p+1)!n!}{(p+n)!a},$$
$$f(n+1)=a\frac{(p+n)!}{p!n!}=a\binom{p+n}{p},$$

és éppen ezt akartuk belátni. Ezzel indukciós bizonyításunkat befejeztük.

Könnyen látható behelyettesítéssel, de előbbi bizonyításunkból is látszik, hogy a felírt alakú függvények valóban ki is elégítik minden n-re az összefüggést. Így tehát pontosan a következő függvények megfelelők: $f(n)=\binom{p+n-1}{p}a$, ahol a tetszőleges nemnulla valós szám.