I. megoldás. Definiáljuk az f_n függvényt a pozitív egész számpárokon a következőképpen:

$$f_n(x,y)=\begin{cases}1, & \text{ha } \left[\frac{n}{x}\right]\ge y,\\ 0, & \text{ha } \left[\frac{n}{x}\right]< y.\end{cases}$$

Nyilván $f_n(x,y)$ értéke pontosan akkor 1, ha $\frac{n}{x}\ge y$, vagyis ha $\frac{n}{y}\ge x$, ezért

$$f_n(y,x)=f_n(x,y).$$

A bevezetett jelöléssel az összeg a következőképpen alakítható:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\left[\frac{n}{k}\right]=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\left(\sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]}1+\sum_{j=\left[\frac{n}{k}\right]+1}^{n}0\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left((2k-1)\sum_{j=1}^{n}f_n(k,j)\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(2k-1)f_n(k,j)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)f_n(j,k)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{j}\right]}(2k-1)\cdot 1+\sum_{k=\left[\frac{n}{j}\right]+1}^{n}(2k-1)\cdot 0\right)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{j}\right]}(2k-1)=\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{n}{j}\right]^2=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]^2.$$

II. megoldás. Megoldásomhoz ötletet adott a *KöMaL Fórum:* Érdekes matekfeladatok 3931. bejegyzése.

Rajzoljunk oszlopdiagramot a derékszögű koordináta-rendszer első síknegyedébe úgy, hogy az x tengely k-adik egységszakasza fölé $\left[\frac{n}{k}\right]^2$ magasságú oszlopot rajzolunk. Az oszlopok együttes területe ekkor a jobb oldal értékét adja, és az oszlopok „ereszkednek”, ahogy k értéke nő. Most tekintsük ezt, mint sordiagramot: nézzük meg, milyen hosszú sor lóg ki az y tengely a $\left((k-1)^2\right)$-ediktől a k^2-edik egységszakaszig terjedő tartományából. Mivel csak négyzetszám magasságú oszlopok vannak, az itt kilógó sorok együtt egy téglalapot alkotnak, melynek területe a két oldalának a szorzata. Az egyik oldala $2k-1$, a másik pedig az a hossz, amennyire ez benyúlik. A téglalap addig tart, amíg az a-adik oszlop magassága legalább k^2, azaz

$$\left[\frac{n}{a}\right]^2\ge k^2,\quad \left(\frac{n}{a}\right)^2\ge k^2,\quad \left(\frac{n}{k}\right)^2\ge a^2,\quad \frac{n}{k}\ge a.$$

Mivel a egész, azért $\left[\frac{n}{k}\right]\ge a$. Tehát a sorok által alkotott k-adik téglalap területe $(2k-1)\left[\frac{n}{k}\right]$; ezzel azt kaptuk, hogy a bal oldali összeg is a diagram területét adja. Ezzel bizonyítottuk az állítást.