Megoldás. Az $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_\ell^{k_\ell}$ prímtényezős felbontású pozitív egész szám pozitív osztóinak száma

$$d(n) = (k_1+1)(k_2+1)\dots(k_\ell+1) = \prod_{i=1}^{\ell}(k_i+1).$$

a) Ha az egzotikus szám páratlan, akkor minden osztója is csak páratlan lehet, tehát az osztók száma is páratlan. A fentiek alapján az osztók számát úgy kaptuk, hogy mindegyik prímkitevőhöz egyet adtunk és ezeket összeszoroztuk. Látjuk, hogy $k_i + 1$ minden $i = 1, 2, \dots, \ell$ esetén páratlan szám, vagyis minden k_i páros. Az n szám mindegyik prímtényezőjének kitevője páros, az n négyzetszám.

b) Tekintsük az $n = p^{p-1}$ alakú pozitív egészeket, ahol p páratan prímszám. Mivel a prímszámok száma végtelen, ezekből a számokból végtelen sok van. Az ilyen alakú számok osztóinak száma $d(n) = p - 1 + 1 = p$, tehát $d(n) \mid n$. Ezzel végtelen sok egzotikus számot találtunk.

Megjegyzés: A feladat *b*) kérdésére bár a legtöbben a fenti konstrukciót választották, további érdekes egzotikus számokat is mutattak a versenyzők. A teljesség igénye nélkül ezek közül néhány:

$$3^2 \cdot p^2, \quad 2^3 \cdot p, \quad 2^{2^m - 1}.$$