Megoldás. Jelöljük a $H_1 \cup H_2$ halmaz összes elemének szorzatát A-val. Az a sejtés, hogy $k = 2n+1$ minden n-re megfelelő választás. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. Adott n esetén jelölje k_n és A_n a megfelelő k, illetve A értéket.

i) $n = 1$-re $k_1 = 3$, $H_1 = \{1\}$, $H_2 = \{4\}$. Látható, hogy

$$H_1 \cup H_2 = \{1, 4\}, \quad \text{így} \quad A_1 = 1 \cdot 4, \quad \text{ami négyzetszám.}$$

ii) Az indukciós feltevés alapján

$$\begin{aligned} A_n &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (1+k)(3+k) \cdot \ldots \cdot (2n-1+k) = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (1+2n+1)(3+2n+1) \cdot \ldots \cdot (2n-1+2n+1) = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+2)(2n+4) \cdot \ldots \cdot (4n) \end{aligned}$$

négyzetszám.

iii) Most igazoljuk az állítást $n+1$-re. A $k_{n+1} = 2n+3$ beírásával

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)(1+2n+3)(3+2n+3) \cdot \ldots \cdot \\ &\quad \cdot (2n-1+2n+3)(2n+1+2n+3) = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)(2n+4)(2n+6) \cdot \ldots \cdot (4n+2)(4n+4) = \\ &= \frac{A_n}{2n+2}(2n+1)(4n+2)(4n+4) = \frac{A_n}{2n+2}(2n+1)2(2n+1)2(2n+2) = \\ &= A_n \cdot 4 \cdot (2n+1)^2. \end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint A_n négyzetszám, így A_{n+1} is az. Tehát létezik minden n-hez alkalmas k, nevezetesen $k = 2n+1$.