I. megoldás. Az ABC, KCF, CKI, HLA, EAL, BDJ és JGB háromszögek egybevágóak, hiszen két azonos hosszúságú oldaluk egyenlő szöget zár be. (Például $LE=HA=CA$, $AE=AB$, valamint

$$\begin{aligned} HAE\sphericalangle &= 360^\circ-90^\circ-90^\circ-CAB\sphericalangle= \\ &=180^\circ-CAB\sphericalangle, \end{aligned}$$

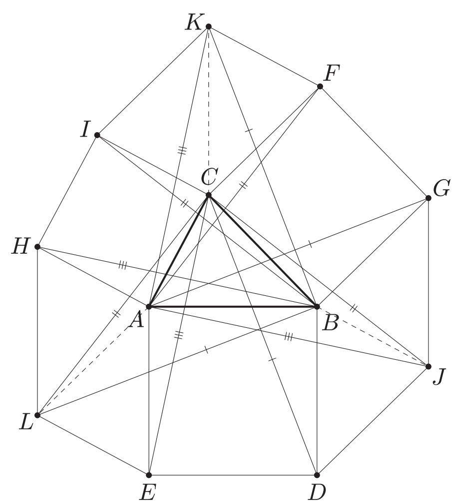
tehát

$$LEA\sphericalangle=180^\circ-HAE\sphericalangle=CAB\sphericalangle.$$

A többi háromszögre is hasonlóan bizonyítható.) Az *ábrán* az egyvonalas, a kétvonalas, illetve a háromvonalas szakaszok páronként megkaphatóak egymásból egy valamelyik oldal hosszával, arra merőlegesen való eltolásból, illetve máshogy párosítva 90°-os elforgatással. Például

$$FCK\triangle\cong CBA\triangle,\quad KCF\sphericalangle=ABC\sphericalangle\quad \text{és}\quad FC\perp CB,$$

ezért az FCK háromszöget 90°-os forgatás viszi a CBA háromszögbe, vagyis $CK\perp BA$ és egyenlő vele. Hasonlóan $LA\perp BC$ és $LA=BC$, valamint $JB\perp AC$ és $JB=AC$. Mindebből következik, hogy $CK\parallel BD$ és $CK=BD$, vagyis $DBKC$ paralelogramma, így $DC=BK$. Hasonlóan $LB=AG$, $LC=AF$, $BI=JC$, $JA=BH$, $EC=AK$. Másrészt $ABG\triangle\cong KCB\triangle$, mert három oldaluk egyenlő. Mivel $AB\perp KC$, így a két háromszög 90°-os forgatással megkapható egymásból, így $AG\perp KB$ is teljesül. Hasonlóan látható be a többi szakaszra is a merőlegesség.



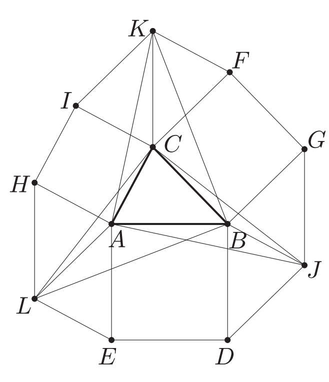
Ezekből következik, hogy $AKB\sphericalangle=JAG\sphericalangle$ (háromvonalas–egyvonalas szög). Ugyanígy $BLC\sphericalangle=GAF\sphericalangle$ (egyvonalas–kétvonalas szög), valamint $CJA\sphericalangle=FAK\sphericalangle$ (kétvonalas–háromvonalas szög).

Tehát $AKB\sphericalangle+BLC\sphericalangle+CJA\sphericalangle=JAG\sphericalangle+GAF\sphericalangle+FAK\sphericalangle=JAK\sphericalangle$, ami két háromvonalas szakasz által bezárt szög, melyek egymásból 90°-os elforgatással kaphatók, tehát $JAK\sphericalangle=90^\circ$.

Ezzel az állítást beláttuk.

Megjegyzések: 1. A B-nél lévő egyvonalas, illetve a C-nél lévő kétvonalas 90°-os szögbe ugyanígy átforgathattuk volna a három szöget. 2. Hasonlóan belátható, hogy $ECD\sphericalangle=JAG\sphericalangle$ és $IBH\sphericalangle=FAK\sphericalangle$, amiből látszik, hogy a feladat ekvivalens egy könnyebben megfogalmazható állítással: Ha egy tetszőleges ABC háromszögre kifele $ABDE$, $BCFG$ és $CAHI$ négyzeteket rajzolok, akkor $FAG\sphericalangle+HBI\sphericalangle+ECD\sphericalangle=90^\circ$.

II. megoldás. $BDJ\triangle\cong ABC\triangle$, mert D-nél és B-nél ugyanakkora szögek vannak és $AB=BD$, illetve $BC=DJ$. Hasonlóan $BDJ\triangle\cong CKI\triangle\cong HLA\triangle\cong ABC\triangle$. Ezért $AL=a$, $BJ=b$ és $CK=c$.



$BJC\triangle \cong ACL\triangle$, mert $BJ = AC$, $BC = AL$ és $JBC\sphericalangle = \gamma + 90^\circ = LAC\sphericalangle$. Hasonlóan $ABL\triangle \cong CKB\triangle$ és $ABJ\triangle \cong KCA\triangle$.

A bizonyítás további részében irányított szögekkel számolunk. Az eddigiekből következik, hogy

$$\begin{aligned}
&BLC\sphericalangle + AKB\sphericalangle + CJA\sphericalangle = \\
&= BLA\sphericalangle + ALC\sphericalangle + AKC\sphericalangle + CKB\sphericalangle + CJB\sphericalangle + BJA\sphericalangle = \\
&= KBC\sphericalangle + BCJ\sphericalangle + JAB\sphericalangle + ABL\sphericalangle + LCA\sphericalangle + CAK\sphericalangle.
\end{aligned}$$

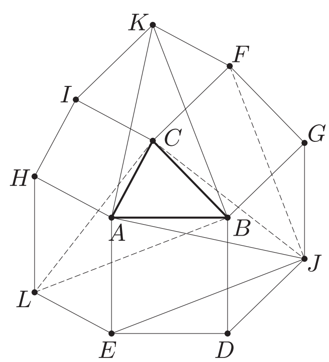
Tekintsük az AKB, a BLC és a CJA háromszögek belső szögeinek összegét:

$$\begin{aligned}
3\cdot 180^\circ &= BAK\sphericalangle + AKB\sphericalangle + KBA\sphericalangle + BLC\sphericalangle + LCB\sphericalangle + CBL\sphericalangle + \\
&\quad + CJA\sphericalangle + JAC\sphericalangle + ACJ\sphericalangle = \\
&= (AKB\sphericalangle + BLC\sphericalangle + CJA\sphericalangle) + (\alpha + CAK\sphericalangle) + (\beta + KBC\sphericalangle) + \\
&\quad + (\gamma + LCA\sphericalangle) + (\beta + ABL\sphericalangle) + (\alpha + JAB\sphericalangle) + (\gamma + BCJ\sphericalangle) = \\
&= (AKB\sphericalangle + BLC\sphericalangle + CJA\sphericalangle) + (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) + \\
&\quad + (CAK\sphericalangle + KBC\sphericalangle + LCA\sphericalangle + ABL\sphericalangle + JAB\sphericalangle + BCJ\sphericalangle) = \\
&= (AKB\sphericalangle + BLC\sphericalangle + CJA\sphericalangle) + 2\cdot 180^\circ + (AKB\sphericalangle + BLC\sphericalangle + CJA\sphericalangle).
\end{aligned}$$

Tehát $180^\circ = 2(AKB\sphericalangle + BLC\sphericalangle + CJA\sphericalangle)$, azaz $90^\circ = AKB\sphericalangle + BLC\sphericalangle + CJA\sphericalangle$, és ezt kellett bizonyítani.

Megjegyzés. Nagyon sok megoldó az ábra miatt olyan következtetésre jutott, ami általános háromszögre nem teljesül. Ezt esetszétválasztással vagy irányított szögek használatával lehetett kiküszöbölni.

III. megoldás. Egy $\overrightarrow{v}$ vektor 90°-kal való elforgatottját jelölje $\overrightarrow{v}'$, egy P pontét pedig P'.



Ekkor

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}' + \overrightarrow{CF} = \\
&= -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}' + \overrightarrow{BC}',
\end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AK}' &= \big(-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}' + \overrightarrow{BC}'\big)' = \\
&= \big(-\overrightarrow{CA}\big)' + \big(\overrightarrow{CA}'\big)' + \big(\overrightarrow{BC}'\big)' = \\
&= -\overrightarrow{CA}' - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}.
\end{aligned}$$

Felírható, hogy $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}' + \overrightarrow{BC}'$.

Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$, és így

$$\big(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\big)' = \overrightarrow{AB}' + \overrightarrow{BC}' + \overrightarrow{CA}' = \overrightarrow{0}' = \overrightarrow{0},$$

így $\overrightarrow{AB}' + \overrightarrow{BC}' = -\overrightarrow{CA}'$ és $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$, tehát $\overrightarrow{AK}' = \overrightarrow{AJ}$. Tehát a K pont A körüli -90°-os elforgatottja a J pont, a B pont elforgatottja az E pont, ezért az $AKB\triangle$ elforgatottja az $AJE\triangle$. Emiatt $AKB\sphericalangle = AJE\sphericalangle$.

Hasonlóan belátható, hogy a $BLC\triangle$ C körüli $+90^\circ$-os elforgatottja az $FJC\triangle$, ami miatt $BLC\sphericalangle = FJC\sphericalangle$.

Tehát $AKB\sphericalangle + BLC\sphericalangle + CJA\sphericalangle = AJE\sphericalangle + FJC\sphericalangle + CJA\sphericalangle = FJE\sphericalangle$. Erről kéne belátni, hogy 90°. Mivel $\overrightarrow{JE} = \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DE}$, így

$$\overrightarrow{JE}' = \big(\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DE}\big)' = \big(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{DE}\big)' = \overrightarrow{GB}' + \overrightarrow{DE}' = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{JG} = \overrightarrow{JF}.$$

Tehát az F pont az E pont J körüli -90°-os elforgatottja. Ezzel beláttuk, hogy $FJE\sphericalangle = 90^\circ$, a bizonyítást befejeztük.