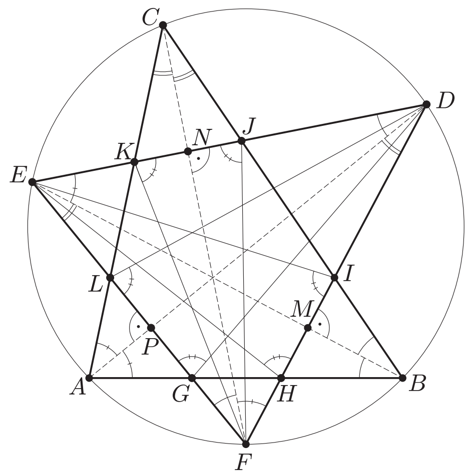
Megoldás. Jelölje az ABC háromszög szögeit rendre 2α, 2β és 2γ. Legyen továbbá $AD \cap EF = P$, $BE \cap FD = M$ és $CF \cap DE = N$.



Az azonos íven nyugvó kerületi szögek egyenlősége miatt ekkor $ADE\sphericalangle = ABE\sphericalangle = \beta$, $DEB\sphericalangle = DAB\sphericalangle = \alpha$ és $BEF\sphericalangle = BCF\sphericalangle = \gamma$. Tehát a DEP háromszögben a D-nél és E-nél lévő szögek összege $\beta + (\alpha + \gamma) = 90°$, ezért a háromszög harmadik szöge derékszög, vagyis $AD \perp EF$. Ugyanígy kapjuk, hogy $BE \perp FD$ és $CF \perp DE$.

Az LAG háromszögben tehát az A csúcsból induló AP szögfelező merőleges a szemközti oldalra. Ezért AP a háromszögnek szimmetriatengelye, $LA = GA$ és $LP = PG$. Viszont az AP egyenes D-n is átmegy, tehát $LD = DG$, vagyis a DGL háromszög is egyenlőszárú. Ugyanígy kapjuk, hogy az EHI és FKJ háromszögek is egyenlőszárúak, és ezen háromszögek szimmetriatengelye BE, illetve CF.

A háromszögek hasonlóságának belátásához elegendő megmutatnunk, hogy alapon fekvő szögeik egyenlőek. Mivel $CKD\sphericalangle = CKJ\sphericalangle = 90° - \gamma$, ezért $DKL\sphericalangle = 90° + \gamma$. Ekkor az $FDKL$ négyszögben a szemközti szögek összege

$$DKL\sphericalangle + LFD\sphericalangle = DKL\sphericalangle + EFC\sphericalangle + CFD\sphericalangle = 90° + \gamma + \beta + \alpha = 180°,$$

vagyis a négyszög húrnégyszög. E húrnégyszög köréírt körében $DKF\sphericalangle$ és $DLF\sphericalangle$ ugyanahhoz a DF ívhez tartozó kerületi szögek, ezért $DKF\sphericalangle = DLF\sphericalangle$. Ugyanígy kapjuk, hogy $DEGH$ is húrnégyszög, amiből pedig $DGE\sphericalangle = DHE\sphericalangle$ következik.

Tehát a DGL, EHI és FKJ háromszögek olyan egyenlőszárú háromszögek, melyeknek az alapon fekvő szögeik egyenlőek, ezért a háromszögek hasonlóak egymáshoz.