

Az ellenálláshuzal kezdeti ellenállása legyen R_1 , az akkumulátor feszültsége U , a huzal sugara r , a hossza kezdetben ℓ_1 . Ismerjük a huzal hőmérsékletét az első esetben ($T_1 = 37^\circ\text{C}$), valamint a környezet hőmérsékletét ($T_0 = 27^\circ\text{C}$).

A huzalt az átfolyó áram

$$(1) \quad P_1 = UI_1 = \frac{U^2}{R_1}$$

teljesítménnyel melegíti. Ezzel a környezetnek leadott hő tart egyensúlyt, ami – fémről lévén szó – elsősorban hővezetés formájában történik. A hőközlés egyéb formáit (a konvekciót és a hőszugárzást) most figyelmen kívül hagyjuk, feltételezzük, hogy ezek mértéke elhanyagolható a hővezetéshez képest.

A hővezetés képlete alapján

$$H = \lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

teljesítménnyel adja át a hőt a huzal a környezetének, ahol λ a huzal hővezetési tényezője, A a vezeték felületének nagysága, melyen át a hőátadás történik (hosszú, vékony huzal esetében $A \approx 2r\pi\ell$), ΔT a környezet és a huzal közti hőmérsékletkülönbség, Δx pedig a huzal belseje és a környezet „átlagos távolsága”. (Δx nagyságát nehéz lenne pontosan megadni, de erre nincs is szükség, elegendő azt tudnunk, hogy az értéke ℓ -től független állandó.)

Állandósult állapotban (amikor a huzal hőmérséklete időben már nem változik) az akkumulátor elektromos teljesítménye megegyezik a hőleadás teljesítményével:

$$(2) \quad P_1 = H_1, \quad \text{vagyis} \quad \frac{U^2}{R_1} = \lambda A \frac{\Delta T_1}{\Delta x},$$

ahol $\Delta T_1 = T_1 - T_0 = 10^\circ\text{C}$.

A huzal ellenállása az

$$R = \rho \frac{\ell}{A'}$$

általános képlet alapján számolható, amelyben ρ a huzal anyagának fajlagos ellenállását, ℓ a huzal hosszát, A' pedig a huzal keresztmetszetét ($A' = r^2\pi$) jelöli. Ha a huzal egyharmadát levágjuk, akkor hossza kétharmadára csökken, a keresztmetszete nem változik, így ellenállása kétharmada lesz az eredetinek: $R_2 = \frac{2}{3}R_1$. Mivel U állandó marad, az (1) összefüggés szerint az akkumulátor másfélszer nagyobb teljesítménnyel tudja melegíteni a huzalt, mint korábban:

$$P_2 = \frac{3}{2}P_1.$$

(Feltételezzük, hogy a hőmérsékletváltozás nem túl nagy, emiatt a fajlagos ellenállás hőfokfüggését figyelmen kívül hagyhatjuk.)

A huzal egyharmadának levágásakor A kétharmadára csökken (hiszen $A \sim \ell$), így a környezeténél ΔT_2 -vel magasabb hőmérsékletű huzal által leadott hőteljesítmény:

$$H_2 = \lambda \left(\frac{2}{3}A \right) \frac{\Delta T_2}{\Delta x}.$$

A „megcsonkított huzal” állandósult hőmérsékleti állapotában

$$(3) \quad P_2 = H_2, \quad \text{tehát} \quad \frac{3}{2}P_1 = \frac{2}{3}\lambda \left(\frac{2}{3}A \right) \frac{\Delta T_2}{\Delta x}.$$

A (2) és (3) egyenletekből következik, hogy a huzal és a környezet közti hőmérsékletkülönbség a második esetben

$$\Delta T_2 = \left(\frac{3}{2} \right)^2 \Delta T_1 = 22,5^\circ\text{C},$$

az új, állandósult hőmérséklet pedig $T_2 = T_0 + \Delta T_2 = 49,5^\circ\text{C}$ lesz.

II. megoldás. Tegyük fel, hogy a huzal által felvett teljesítmény teljes egészében a hőmérsékleti sugárzásra fordítódik. Használjuk fel a Stefan–Boltzmann-törvényt:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot (T_1^4 - T_0^4),$$

ahol T_1 a test (itt a vezeték) hőmérséklete, T_0 pedig a környezet hőmérséklete.

Állandósult állapotban a kisugárzott hőteljesítmény megegyezik az U^2/R felvett elektromos teljesítménnyel. Az akkumulátor feszültsége a vezeték meg rövidítésekor nem változik. Az ellenállás egyenesen arányos a vezeték hosszával, ezért levágás után R -ről $\frac{2}{3}R$ -re csökken. Írjuk fel a felvett és leadott teljesítmények egyenlőségét a huzal levágása

előtti és utáni (T hőmérsékletű) állapotára. Mivel $T_1 = 310$ K, $T_0 = 300$ K, a kelvin mértékegységet (az egyszerűség kedvéért) elhagyva felírhatjuk, hogy

$$\frac{U^2}{R} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot A \cdot (310^4 - 300^4),$$
$$\frac{U^2}{\frac{2}{3}R} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot \frac{2}{3}A \cdot (T^4 - 300^4).$$

A fenti egyenletek hányadosát képezve:

$$\frac{3}{2} = \frac{2}{3} \frac{(T^4 - 300^4)}{(310^4 - 300^4)},$$

ahonnan a keresett hőmérséklet:

$$T = \sqrt[4]{\frac{9 \cdot (310^4 - 300^4)}{4}} + 300^4 \approx 321 \text{ K} \approx 48 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Megjegyzés. A kétféle megoldás eredménye – jóllehet a hozzájuk tartozó gondolatmenet fizikai tartalma lényegesen különböző – gyakorlatilag megegyezik. Ennek az a magyarázata, hogy viszonylag kicsiny hőmérsékletkülönbségek esetén a hősugárzás teljesítménye is – jó közelítéssel – a hőmérsékletkülönbség első hatványával arányos, éppen úgy, mint a hővezetéssel leadott teljesítmény. Emiatt kapjuk gyakorlatilag ugyanazt az eredményt, ha csak a sugárzással vagy csak a hővezetéssel számolunk, illetve ha mindkettőt (akármilyen arányban keverve) figyelembe vesszük.