3. feladat. A Nagy Hadronütköztető

A rész. Az LHC gyorsító

A.1. Az energiamegmaradás törvénye szerint:

$$eU = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2.$$

Ezt megoldva v-re:

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m_\mathrm{p}c^2}{m_\mathrm{p}c^2 + eU}\right)^2}.$$

A.2. A fenti eredményt felhasználva:

$$\Delta = 1 - \frac{v}{c} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{m_\mathrm{e}c^2}{m_\mathrm{e}c^2 + eU}\right)^2}.$$

Mivel $m_\mathrm{e}c^2 \ll eU$, így

$$\Delta \approx \frac{1}{2}\left(\frac{m_\mathrm{e}c^2}{eU}\right)^2 = 3{,}63 \cdot 10^{-11}.$$

A.3. Mivel a részecskék impulzusának csak az iránya változik, az impulzus nagysága állandó, a körmozgás dinamikai feltétele:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = p\,\frac{v}{r} = \frac{m_\mathrm{p}v^2}{r\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = evB.$$

Az energia:

$$E = \frac{m_\mathrm{p}c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ezekből (felhasználva, hogy $r = L/(2\pi)$ és $v \approx c$):

$$B = \frac{2\pi E}{ecL} = 5{,}50\ \mathrm{T}.$$

A.4. Keressük a kisugárzott teljesítmény képletét $P_\mathrm{s} = a^\alpha q^\beta c^\gamma \varepsilon_0^\delta$ alakban. A megfelelő dimenziók:

$$[P_\mathrm{s}] = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}, \qquad [a] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \qquad [q] = \mathrm{C}, \qquad [c] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \qquad [\varepsilon_0] = \frac{\mathrm{C}^2\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^3}.$$

A tömeg, a töltés, a hosszúság és az idő mértékegységének összevetéséből rendre a

$$\delta = -1, \qquad \beta + 2\delta = 0, \qquad \alpha + \gamma - 3\delta = 2, \qquad -2\alpha - \gamma + 2\delta = -3$$

egyenleteket kapjuk. Ezekből $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = -3$, $\delta = -1$, vagyis a sugárzási teljesítmény:

$$P_\mathrm{t} \sim \frac{a^2 \cdot e^2}{c^3 \cdot \varepsilon_0}.$$

A.5. Egyetlen részecske által kisugárzott teljesítmény:

$$P_\mathrm{s} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\frac{1}{6\pi}\,\frac{a^2\cdot e^2}{c^3\cdot\varepsilon_0}.$$

Felhasználva az E energia **A.3.**-ban megadott alakját, valamint, hogy $a \approx c^2/r$ és $r = L/(2\pi)$:

$$P_\mathrm{s} = \left(\frac{E}{m_\mathrm{p}c^2}\right)^4 \frac{2\pi e^2 c}{3\varepsilon_0 L^2} = 7{,}94 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{W}.$$

A teljes kisugárzott teljesítmény:

$$P_\mathrm{t} = 2 \cdot 2808 \cdot 1{,}15 \cdot 10^{11} \cdot P_\mathrm{s} = 5{,}13\ \mathrm{kW}.$$

A.6. A relativisztikus mozgásegyenlet:

$$F = e\frac{U}{d} = \text{állandó} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{p_\text{vég.} - p_\text{kezd.}}{T}.$$

Felhasználva a végsebesség **A.1.**-beli alakját és hogy $p_{\text{vég.}} = m_\text{p} v/\sqrt{1-v^2/c^2}$, továbbá $p_{\text{kezd.}} = 0$:

$$T = \frac{m_\text{p} c d}{eU}\sqrt{\left(1+\frac{eU}{m_\text{p} c^2}\right)^2 - 1} = 218 \text{ ns.}$$

B rész. Részecskeazonosítás

B.1. A $v = \ell/t$ és a $p = mv/\sqrt{1-v^2/c^2}$ összefüggésekből:

$$m = \frac{p}{\ell c}\sqrt{c^2t^2 - \ell^2}.$$

B.2. A repülési idők különbsége:

$$\Delta t = 3 \cdot 150 \text{ ps} = 4{,}5 \cdot 10^{-10} \text{ s.}$$

A **B.1.** részből

$$t = \frac{\ell}{c}\sqrt{\left(\frac{mc}{p}\right)^2 + 1}.$$

A kaon és a pion adatait felhasználva:

$$\Delta t = \frac{\ell}{c}\left(\sqrt{0{,}498^2 + 1} - \sqrt{0{,}135^2 + 1}\right),$$

ahonnan $\ell = 1{,}25$ m adódik.

B.3. A nyomkövetési csőben megtett körív hossza:

$$\ell = 2r \;\arcsin\frac{R}{2r}.$$

Csak keresztirányú p_T impulzus van, és a relativisztikus mozgásegyenlet $p(v/r) = evB$, a nyaláb irányára merőleges (transzverzális) impulzus: $p_\text{T} = erB$. Felhasználva **B.1.** eredményét:

$$m = \frac{eB}{c}\sqrt{\left(\frac{ct}{2\;\arcsin\frac{R}{2r}}\right)^2 - r^2}.$$

B.4. A megadott adatokat behelyettesítve **B.3.** eredményébe a tömegekre

$$m_\text{A} = 1{,}673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 938{,}65 \text{ MeV}/c^2,$$
$$m_\text{B} = 0{,}240 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 134{,}88 \text{ MeV}/c^2,$$
$$m_\text{C} = 1{,}667 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 935{,}10 \text{ MeV}/c^2,$$
$$m_\text{D} = 0{,}890 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 499{,}44 \text{ MeV}/c^2$$

adódik. Ezek alapján az A és C részecske *proton,* a B részecske *pion,* D pedig *kaon.*