2. feladat. Nemlineáris dinamika elektromos áramkörökben

A rész. Stacionárius állapotok és instabilitások

A.1. A kért adatok a grafikonról leolvashatók:

$$R_{\mathrm{be}} = 1{,}00\ \Omega,$$
$$R_{\mathrm{ki}} = 10{,}0\ \Omega,$$
$$I_0 = 6{,}00\ \mathrm{A},$$
$$R_{\mathrm{k}} = 2{,}00\ \Omega.$$

A.2. Az áramkörre felírva a huroktörvényt:

$$\mathcal{E} = IR + U, \quad \text{amiből} \quad I = \frac{\mathcal{E} - U}{R}.$$

Az áramkör stacionárius állapotait ennek az egyenesnek és az áramkör I–U karakterisztikájának metszéspontjai adják meg.

$R = 3{,}00\ \Omega$ esetében mindig 1 metszéspont van,

$R = 1{,}00\ \Omega$ esetében pedig $\mathcal{E}$ értékétől függően 1, 2 vagy 3 metszéspont lehetséges.

A.3. A stacionárius megoldás a középső ágra esik, így használhatjuk az arra vonatkozó összefüggést:

$$I_{\mathrm{st}} = \frac{\mathcal{E} - R_{\mathrm{k}} I_0}{R - R_{\mathrm{k}}} = 3{,}00\ \mathrm{A},$$
$$U_{\mathrm{st}} = R_{\mathrm{k}}(I_0 - I_{\mathrm{st}}) = 6{,}00\ \mathrm{V}.$$

A.4. A huroktörvény alapján:

$$\mathcal{E} = RI + U_{\mathrm{X}} + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = RI + R_{\mathrm{k}}(I_0 - I) + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t},$$

amiből

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \mathcal{E} - R_{\mathrm{k}} I_0 - (R - R_{\mathrm{k}})I.$$

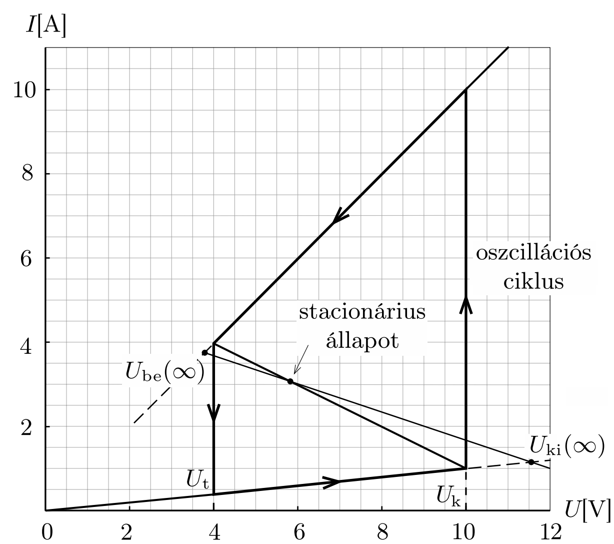
Eszerint,

ha $I > I_{\mathrm{st}}$, akkor $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t < 0$, azaz az áramerősség csökken,

ha $I < I_{\mathrm{st}}$, akkor $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t > 0$, azaz az áramerősség nő, tehát a stacionárius állapot stabil.

B rész. Bistabil, nemlineáris áramköri elemek a fizikában: rádióadó

B.1. Az oszcilláció a *4. ábrán* látható.



4. ábra

A versenyzőktől a következő magyarázatokat várták el (a maximális pontszámhoz ezek közül legalább hármat):

1. A feszültség az ugrás közben állandó, mert a kondenzátor feszültsége nem változhat pillanatszerűen.
2. A közbülső ág nem lehet része az oszcillációs ciklusnak, mert az ottani állapotok stabilak.

3. Azért történnek ugrások az I–U karakterisztika töréspontjainál, mert ezekben a pontokban nincs más lehetősége a rendszernek.

4. A rendszer a bekapcsolt ágon balra mozog, mert így közelít a stacionárius állapothoz (amely azonban nem része az I–U grafikonnak).

5. A rendszer a kikapcsolt ágon jobbra mozog, mert így közelít a stacionárius állapothoz (amely azonban nem része az I–U grafikonnak).

B.2. Mivel a nemlineáris áramköri elem a bekapcsolt ág és a kikapcsolt ág között ugrál, a feszültsége ilyen alakban írható fel: $U_\mathrm{X} = R_\mathrm{be/ki} I_\mathrm{X}$. Az áramkör mindkét ágon soros RC-körként viselkedik C kapacitással és

$$\frac{R_\mathrm{be/ki} R}{R_\mathrm{be/ki} + R}$$

ellenállással (hiszen az R ellenállás és az X elem párhuzamosan vannak kötve). Az áramkör időtényezője:

$$\tau_\mathrm{be/ki} = \frac{R_\mathrm{be/ki} R}{R_\mathrm{be/ki} + R} C.$$

Ha a be- vagy a kikapcsolt ágat a töréspontokon túl is meghosszabbítanánk, akkor az áramkör hosszú idő után a stacionárius állapotba érkezne, és a feszültsége

$$U_\mathrm{be/ki}(\infty) = \frac{R_\mathrm{be/ki}}{R_\mathrm{be/ki} + R} \mathcal{E}$$

lenne.

A nemlineáris elemen eső feszültség az állandósult állapot $U_\mathrm{be/ki}(\infty)$ feszültségének és az exponenciálisan lecsengő feszültségtagnak az összege:

$$U_\mathrm{X}(t) = U_\mathrm{be/ki}(\infty) + \left[U_\mathrm{be/ki}(0) - U_\mathrm{be/ki}(\infty)\right] e^{-\frac{t}{\tau_\mathrm{be/ki}}}.$$

A rendszer által a bekapcsolt ágon töltött idő (egy ciklusban):

$$t_\mathrm{be} = \tau_\mathrm{be} \ln \frac{U_\mathrm{k} - U_\mathrm{be}(\infty)}{U_\mathrm{t} - U_\mathrm{be}(\infty)} = 2{,}41 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s},$$

a kikapcsolt ágon töltött idő pedig

$$t_\mathrm{ki} = \tau_\mathrm{ki} \ln \frac{U_\mathrm{ki}(\infty) - U_\mathrm{t}}{U_\mathrm{ki}(\infty) - U_\mathrm{k}} = 3{,}67 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}.$$

Az oszcilláció teljes periódusideje tehát: $T = t_\mathrm{be} + t_\mathrm{ki} = 6{,}08 \cdot 10^{-6}$ s.

B.3. Hanyagoljuk el a kikapcsolt ágon felhasznált energiát! A bekapcsolt ágon felhasznált energiát közelítsük a következőképp:

$$E \approx \frac{1}{R_\mathrm{be}} \left(\frac{U_\mathrm{t} + U_\mathrm{k}}{2}\right)^2 t_\mathrm{be} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}.$$

A teljesítmény ebből (közelítőleg):

$$P = \frac{E}{T} \approx 20\ \mathrm{W}.$$

B.4. A rádiójel hullámhossza: $\lambda = cT = 1{,}82 \cdot 10^3$ m. Az antenna optimális hossza $\lambda/4$ (vagy $3\lambda/4$, $5\lambda/4$, stb.) A feltételeknek megfelelő egyetlen lehetséges választás: $s = \lambda/4 = 456$ m.

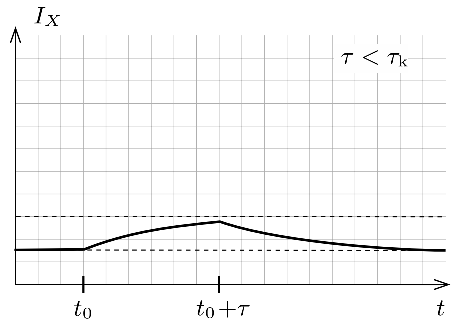
C rész. Bistabil, nemlineáris áramköri elemek a biológiában: neurisztor

C.1. Ha a telep feszültsége $\mathcal{E}' = 12{,}0$ V, az állandósult állapot a kikapcsolt ágon lesz:

$$U' = \frac{R_\mathrm{ki}}{R + R_\mathrm{ki}} \mathcal{E}' = 9{,}23\ \mathrm{V}.$$

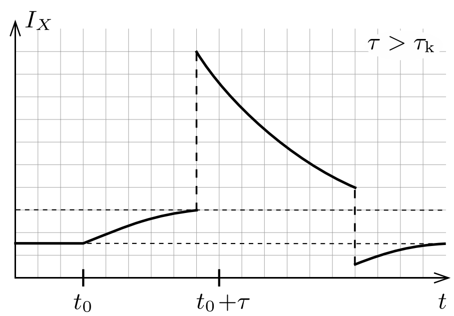
Ha a telep feszültségét ismét $\mathcal{E} = 15{,}0$ V értékre növeljük, akkor a rendszer állapota elkezd jobbra mozogni a kikapcsolt ágon (ugyanúgy, mint a **B** részben).

Ha a telep feszültsége még azelőtt újra lecsökken, hogy az elem feszültsége eléri a küszöbfeszültséget, akkor a rendszer egyszerűen visszamegy a stacionárius állapotba. Az X áramköri elem áramának időfüggését az *5. ábrán* vázoltuk.



5. ábra

Ha viszont az elem feszültsége eléri a küszöbfeszültséget, akkor a rendszer felugrik a bekapcsolt ágra, és végigjár *egy* teljes oszcillációs ciklust (hiszen $\tau < T$), mielőtt visszaérkezik a stacionárius állapotba. Az X áramköri elem áramának időfüggése vázlatosan a *6. ábrán* látható.



6. ábra

C.2. A kritikus idő a küszöbfeszültség eléréséhez szükséges idő (amit a **B.2** részben megismert módon számíthatunk ki):

$$\tau_\mathrm{k} = \tau_\mathrm{ki} \ln \frac{U_\mathrm{ki}(\infty) - U'}{U_\mathrm{ki}(\infty) - U_\mathrm{k}} = 9{,}36 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}.$$

C.3. Mivel $\tau > \tau_\mathrm{k}$, a rendszer végrehajt egy oszcillációt, tehát az áramkör ilyenkor neurisztor.