1. feladat. Két mechanikai probléma

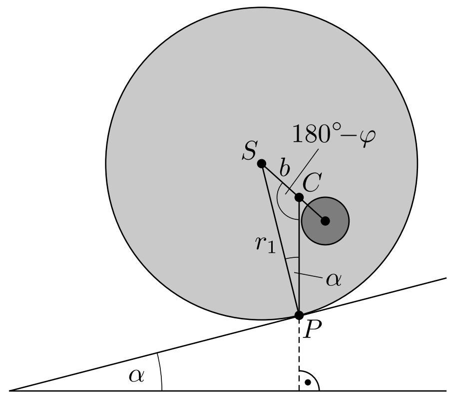
A rész. Elrejtett korong

A.1. Egyensúlyban a testre ható erők és forgatónyomatékok eredője nulla. Az utóbbi feltétel a lejtővel való P érintkezési pontra nézve úgy teljesíthető, ha a rendszer C tömegközéppontja éppen a P pont felett helyezkedik el (*1. ábra*). Alkalmazzuk a PCS háromszögre a szinusztételt:

$$\frac{\sin(180^\circ - \varphi)}{\sin\alpha} = \frac{r_1}{b},$$

ebből

$$b = \frac{r_1 \sin\alpha}{\sin\varphi}.$$



1. ábra

A.2. A korong φ szögkitérésekor a nehézségi erő forgatónyomatéka $Mgb\sin\varphi$, iránya pedig olyan, hogy a kitérést csökkenteni igyekszik. A forgómozgás egyenlete tehát a következő alakot ölti:

$$\Theta_S\,\ddot{\varphi} = -Mgb\sin\varphi.$$

Kis szögekre $\sin\varphi \approx \varphi$, így egy harmonikus rezgőmozgás (fizikai inga) mozgásegyenletét kapjuk:

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi, \qquad \text{ahol} \qquad \omega = \sqrt{\frac{Mgb}{\Theta_S}}.$$

A rezgés periódusideje a körfrekvenciával $T = 2\pi/\omega$ kapcsolatban áll, így a tehetetlenségi nyomaték kifejezhető:

$$\Theta_S = \frac{T^2}{4\pi^2}Mgb.$$

A.3. Gondolkozhatunk úgy, hogy egy ϱ_1 sűrűségű, r_1 sugarú tömör (tehát lyuk nélküli) korong és egy $\varrho_2 - \varrho_1$ sűrűségű, r_2 sugarú korong közös tömegközéppontjának helyét kell meghatároznunk. A távolságokat a nagyobb korong S középpontjától mérve a tömegközéppont helyét megadó egyenlet:

$$b = \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)r_2^2\pi h_2}{M}d, \qquad \text{amiből} \qquad d = \frac{Mb}{(\varrho_2 - \varrho_1)r_2^2\pi h_2}.$$

A.4. Egy m tömegű, r sugarú korong tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{2}mR^2$. Ennek és a Steiner-tételnek a felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\Theta_S = \underbrace{\frac{1}{2}\varrho_1 r_1^4\pi h_1}_{\text{nagy korong}} + \underbrace{(\varrho_2 - \varrho_1)r_2^2\pi h_2\left(\frac{r_2^2}{2} + d^2\right)}_{\text{kis korong a Steiner-tétellel}}.$$

A d-re az előző részfeladatban kapott eredményt felhasználva:

$$\Theta_S = \frac{1}{2}\varrho_1 r_1^4\pi h_1 + \frac{1}{2}(\varrho_2 - \varrho_1)r_2^4\pi h_2 + \frac{M^2b^2}{(\varrho_2 - \varrho_1)r_2^2\pi h_2}.$$

A.5. Írjuk fel a teljes rendszer tömegét:

$$M = \varrho_1 r_1^2\pi h_1 + (\varrho_2 - \varrho_1)r_2^2\pi h_2.$$

Ebből kifejezhetjük a $(\varrho_2-\varrho_1)r_2^2\pi h_2$ tagot, és beírhatjuk az **A.4.** részfeladat végeredményébe. A Θ_S-re korábban kapott formulát is felhasználva:

$$\frac{T^2}{4\pi^2}Mgb=\frac{1}{2}\varrho_1 r_1^4\pi h_1+\frac{1}{2}\left(M-\varrho_1 r_1^2\pi h_1\right)r_2^2+\frac{M^2b^2}{M-\varrho_1 r_1^2\pi h_1}.$$

Ebből kifejezhető r_2:

$$r_2=\sqrt{\frac{2}{M-\varrho_1 r_1^2\pi h_1}\left(\frac{T^2}{4\pi^2}Mgb-\frac{M^2b^2}{M-\varrho_1 r_1^2\pi h_1}-\frac{1}{2}\varrho_1 r_1^4\pi h_1\right)}.$$

Ennek ismeretében az össztömegből h_2 megkapható:

$$h_2=\frac{M-\varrho_1 r_1^2\pi h_1}{(\varrho_2-\varrho_1)r_2^2\pi}.$$

B rész. Forgó űrállomás

B.1. A forgó űrhajó padlóján álló, m tömegű testre az $mR\omega_0^2$ centrifugális erő hat. Ez akkor egyezik meg a test mg_F földi súlyával, ha az űrállomás szögsebessége $\omega_0=\sqrt{g_\mathrm{F}/R}$.

B.2. Egy rugón rezgő test körfrekvenciája $\omega_\mathrm{F}=\sqrt{k/m}$.

B.3. Az űrhajón a mesterséges gravitáció egyenesen arányos a forgástengelytől mért távolsággal: $g(r)=r\omega_0^2$. A rugóra akasztott testet az egyensúlyi helyzetéből sugárirányban kifelé x távolsággal kitérítve, arra nemcsak a rugóerő növekménye, hanem az effektív gravitációs tér megváltozásából származó erő is hat:

$$-kx+mx\omega_0^2=m\ddot{x},$$

ami éppen olyan, mint egy $k^*=k-m\omega_0^2$ effektív direkciós erejű rugón rezgő test mozgásegyenlete, a rezgés körfrekvenciája tehát $\omega=\sqrt{k/m-\omega_0^2}$.

B.4. Az M_F tömegű, R_F sugarú Föld felszíne felett h magasságban a gravitációs gyorsulás:

$$g_\mathrm{F}(h)=\gamma\frac{M_\mathrm{F}}{\left(R_\mathrm{F}+h\right)^2}=\gamma\frac{M_\mathrm{F}}{R_\mathrm{F}^2}\left(1+\frac{h}{R_\mathrm{F}}\right)^{-2}=g_\mathrm{F}(0)\left(1+\frac{h}{R_\mathrm{F}}\right)^{-2}.$$

Mivel $h/R_\mathrm{F}\ll 1$, alkalmazhatjuk a kis ε mennyiségekre érvényes $(1+\varepsilon)^n\approx 1+n\varepsilon$ lineáris közelítést:

$$g_\mathrm{F}(h)\approx g_\mathrm{F}(0)\left(1-\frac{2h}{R_\mathrm{F}}\right).$$

A földi gravitációs mezőben tehát az egyensúlyi helyzetéből x távolságra kitérített test mozgásegyenlete

$$-kx+mg_\mathrm{F}\frac{2x}{R_\mathrm{F}}=m\ddot{x},$$

amiből a rezgés körfrekvenciája

$$\widetilde{\omega_\mathrm{F}}=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{2g_\mathrm{F}}{R_\mathrm{F}}}.$$

B.5. Az előző két részfeladat eredményéből látszik, hogy ω és $\widetilde{\omega_\mathrm{F}}$ akkor egyezik meg, ha $\omega_0^2=2g_\mathrm{F}/R_\mathrm{F}$. A **B.1.** kérdés eredményét felhasználva ez azt jelenti, hogy az űrállomás sugarának hossza éppen a földsugár fele: $R=R_\mathrm{F}/2$.

B.6. A feladat megoldható inerciarendszerben is, ehelyett mi most a rövidebb, forgó koordináta-rendszerbeli leírást választjuk. A $H\ll R$ magasságból elengedett test „függőlegesen lefelé” (azaz sugárirányban kifelé) mutató sebessége t idejű esés után jó közelítéssel $v_y=R\omega_0^2 t$. Az emiatt „vízszintes” (érintő-)irányban ható Coriolis-erő nagysága tehát $F_\mathrm{C}=2mv_y\omega_0=2mR\omega_0^3 t$, a gyorsulás pedig F_C/m. A v_x vízszintes sebességkomponenst az idő függvényében ennek a gyorsulásnak az integrálásával lehet meghatározni:

$$v_x(t)=\int_0^t 2R\omega_0^3 t'\,\mathrm{d}t'=R\omega_0^3 t^2.$$

Behelyettesítve az esés $T=\sqrt{2H/\left(R\omega_0^2\right)}$ idejét, megkapjuk a vízszintes sebességkomponenst a becsapódáskor:

$$v_x=2H\omega_0.$$

A vízszintes elmozdulást a $v_x(t)$ függvény integrálja adja meg:

$$d_x(t)=\int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t'=\frac{1}{3}R\omega_0^3 t^3.$$

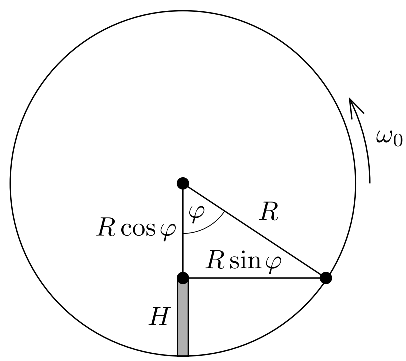
A $t=T$ helyettesítéssel kapjuk meg a teljes vízszintes elmozdulást:

$$d_x = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8H^3}{R}}.$$

B.7. A mozgást inerciarendszerből a legegyszerűbb leírni. A $H=R(1-\cos\varphi)$ magasságú toronyból a test $\omega_0 R\cos\varphi$ kezdősebességgel érintőirányban indul (*2. ábra*), és egyenes vonalú egyenletes mozgással halad egészen az űrállomás padlójáig. A mozgás ideje:

$$t = \frac{R\sin\varphi}{\omega_0 R\cos\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\omega_0}.$$

A test akkor érkezik éppen a torony aljához, ha ezalatt az idő alatt az űrállomás éppen φ szöggel fordul el, azaz $t=\varphi/\omega_0$. Az időre kapott két egyenlet összevetéséből a $\varphi=\operatorname{tg}\varphi$ egyenletet kapjuk. Ennek végtelen sok megoldása van: az első a triviális $\varphi=0$, a többi pedig csak numerikusan határozható meg. A következő gyök $3\pi/2$ körüli érték, ami a nem releváns $H>R$ eredményre vezet. Az $5\pi/2$ környékén lévő harmadik gyök az, amit keresünk. Zsebszámológéppel a pontosabb $\varphi\approx 7{,}725$ radián értéket kaphatjuk. Ennek a szögnek a felhasználásával meghatározhatjuk a torony magasságát: $H\approx 0{,}871\,R$.



2. ábra

B.8. Mivel az y irányú Coriolis-erőt elhanyagolhatjuk, ebben az irányban a test harmonikus rezgőmozgást végez d amplitúdóval. A kezdeti feltételeket is figyelembe véve: $y(t)=-d\cos\omega t$. Az y irányú sebességre ennek deriválásával $v_y(t)=d\omega\sin\omega t$ értéket kapunk, amellyel az x irányú Coriolis-erő (az űrállomás szögsebességvektorát a papír síkjába befelé mutatónak választva):

$$F_x(t) = -2mv_y(t)\omega_0 = -2m\omega_0 d\omega\sin\omega t.$$

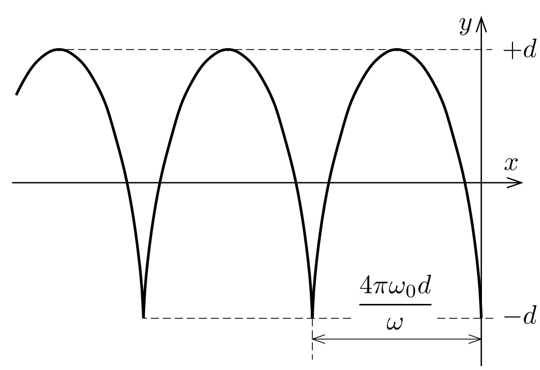
A test gyorsulása x irányban tehát éppen olyan, mint egy harmonikus oszcillátoré. Az x irányú elmozdulást a gyorsulás kétszeri integrálásával kapjuk:

$$x(t) = \frac{2\omega_0 d}{\omega}\sin\omega t + c_1 t + c_2,$$

ahol c_1 és c_2 integrálási állandók. A $t=0$ időpillanatban a test x irányú sebessége és x koordinátája is nulla, ebből $c_1=-2\omega_0 d$ és $c_2=0$ adódik, tehát:

$$x(t) = \frac{2\omega_0 d}{\omega}(\sin\omega t - \omega t).$$

A pálya vázlatos rajza a *3. ábrán* látható.



3. ábra