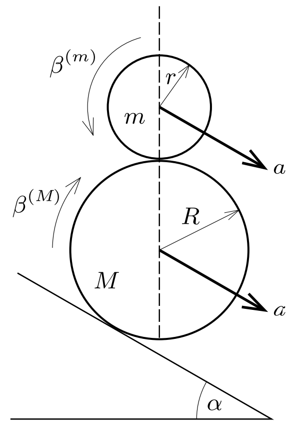
Megoldás. A feladat szövegében leírt furcsa, instabil mozgás nyilván megvalósulhat, ha a „lejtő" vízszintes és a testek nem gyorsulnak. A továbbiakban az $\alpha \neq 0$ esettel foglalkozunk.

Jelölje az egyes gömbök középpontjának gyorsulását a (mivel a két test *egymáshoz képest* nem mozog, a értéke mindkettőjüknél ugyanakkora), a szöggyorsulásukat pedig $\beta^{(m)}$ és $\beta^{(M)}$ (*1. ábra*).



1. ábra

Az alsó gömb tisztán gördül a lejtőn, emiatt a szöggyorsulása

(1) $$\beta^{(M)} = \frac{a}{R}.$$

A gömbök egymással érintkező pontjai a *gömbök középpontjához viszonyítva* ugyancsak a nagyságú, vízszintes irányú gyorsulással mozognak, emiatt

(2) $$\beta^{(m)} = \frac{a}{r}$$

is teljesül.

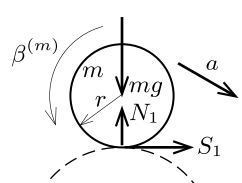
Írjuk fel a m tömegű gömb forgómozgásának egyenletét! Ha a gömbök között ható nyomóerő nagysága N_1, a súrlódási erő pedig S_1 (ahogy azt a *2. ábra* mutatja), akkor a forgás dinamikai egyenlete:

$$S_1 r = \Theta^{(m)} \beta^{(m)}.$$

($\Theta^{(m)} = \frac{2}{5}mr^2$ a felső gömb tehetetlenségi nyomatéka.) Ez az egyenlet (2) és a tehetetlenségi nyomaték képletének felhasználásával

(3) $$S_1 = \frac{2}{5}ma$$

alakra hozható.

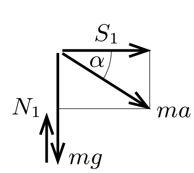


2. ábra

Felírhatjuk még a m tömegű gömb tömegközéppontjára vonatkozó Newton-féle mozgásegyenletet is. A testre ható három erő eredője ma nagyságú és párhuzamos a lejtővel. A *3. ábráról* leolvasható, hogy

$$\cos\alpha = \frac{S_1}{ma} = \frac{\frac{2}{5}ma}{ma} = \frac{2}{5}, \quad \text{azaz} \quad \alpha \approx 66{,}4^\circ.$$

Csak ekkora hajlásszögű lejtőn maradhat meg a m tömegű gömb a másik (M tömegű) gömbön. (Érdekes, hogy a kritikus hajlásszög sem a testek tömegétől, sem pedig a sugarak nagyságától nem függ.)



3. ábra

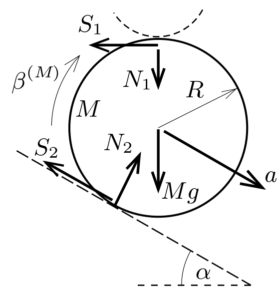
Jelöljük a M tömegű, $\Theta^{(M)} = \dfrac{2}{5}MR^2$ tehetetlenségi nyomatékú gömbre ható erőket a *4. ábrán* látható módon. Ezen test forgómozgásának egyenlete:

$$(S_2 - S_1)R = \Theta^{(M)}\beta^{(M)},$$

amiből (1) és (3) felhasználásával

$$S_2 = \frac{2}{5}(m+M)a \tag{4}$$

következik.



4. ábra

Utolsó lépésként alkalmazzuk Newton II. törvényét a két gömbből álló rendszer egészére. (Ezt azért tehetjük meg, mert mindkét test tömegközéppontjának gyorsulása ugyanakkora. Jóllehet a két gömb nem alkot merev testet, de a lejtő menti mozgás szempontjából úgy kezelhetők, mint egyetlen $m+M$ tömegű merev test.) A gömbök között ható (belső) erőket nem kell figyelembe vennünk, hiszen azok összege nulla, így csak a nehézségi erők és a lejtő mentén ható súrlódási erő eredőjével kell számolnunk: $(m+M)g\sin\alpha - S_2 = (m+M)a$. Kihasználva a súrlódási erő (4)-ben szereplő alakját és a lejtő hajlásszögének ismert értékét, a keresett gyorsulásra az

$$a = \frac{5}{7}\,g\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}\,g \approx 6{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

eredményt kapjuk. (Figyelemre méltó, hogy az a gyorsulás sem a testek tömegétől, sem pedig a sugarától nem függ.)