Megoldás. Az egyenlőtlenség bal oldala és a jobb oldal nevezője mindig pozitív, ezért az egyenlőtlenség biztosan teljesül, ha p értéke negatív vagy nulla. A továbbiakban p pozitív értékeit vizsgáljuk.

Szorozzunk a pozitív $\sin^3 x$-szel, és használjuk az

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\sin^2 x}$$

azonosságot:

$$(1+\sin x)^3 \geq p \sin x(1-\sin x)(1+\sin x),$$

illetve

$$(1+\sin x)^2 \geq p \sin x(1-\sin x).$$

Rendezés után a következő másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk $\sin x$-re:

$$(1+p)\sin x^2 + (2-p)\sin x + 1 \geq 0.$$

Itt $p \leq 2$ esetén a bal oldal minden tagja nemnegatív, ezért az egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül.

Ha $p > 2$, akkor abban az esetben, amikor az $(1+p)y^2 + (2-p)y + 1 = 0$ egyenletnek valósak a gyökei, a gyökök összege $p-2 > 0$, szorzatuk pedig az ugyancsak pozitív $\frac{1}{1+p} < \frac{1}{3}$. Ilyenkor tehát mindkét gyök pozitív és legalább egyikük kisebb 1-nél, ezért – alkalmas x-re – előáll $\sin x$ alakban. Ha a két valós gyök különböző, akkor mindkettőnek van olyan környezete, ahol a másodfokú kifejezés értéke negatív. Az egyenlőtlenség tehát a $p > 2$ esetben pontosan akkor teljesül, ha a diszkrimináns nem pozitív:

$$0 \geq (2-p)^2 - 4(1+p) = p^2 - 8p = p(p-8),$$

vagyis ha $p \leq 8$.

Tehát a feladat feltételének a $p \leq 8$ számok tesznek eleget.