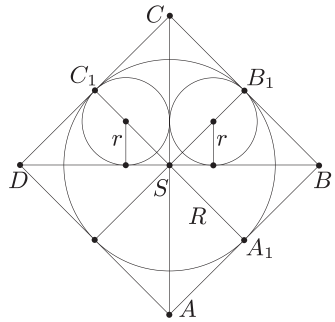
I. megoldás. Húzzuk meg az r és R sugarú körök közös érintőit, és hosszabbítsuk meg az R sugarú kör adott átmérőjét mindkét irányban (*1. ábra*). A keletkező BCD háromszöget tükrözzük a BD átfogójára. Az így létrejött $ABCD$ négyszög nyilvánvalóan négyzet, oldalai $2R$ hosszúak.



1. ábra

A négyzet területe: $T_{ABCD} = 4R^2$.

Az SBC háromszög területe:

$$T_{SBC\triangle} = \frac{T_{ABCD}}{4} = R^2.$$

A Pitagorasz-tételt használva a négyzet átlója:

$$AC = \sqrt{(2R)^2 + (2R)^2} = \sqrt{8R^2} = 2\sqrt{2}\,R,$$

amiből

$$SB = SC = \frac{AC}{2} = \sqrt{2}\,R.$$

$T_{SBC\triangle} = r \cdot s$, ahol s a félkerület:

$$s = \frac{SB + SC + BC}{2} = \frac{\sqrt{2}\,R + \sqrt{2}\,R + 2R}{2} = \sqrt{2}\,R + R = R\big(\sqrt{2} + 1\big).$$

Ebből

$$r = \frac{T_{SBC\triangle}}{s} = \frac{R^2}{R\big(\sqrt{2}+1\big)} = \frac{R}{\big(\sqrt{2}+1\big)} \cdot \frac{\big(\sqrt{2}-1\big)}{\big(\sqrt{2}-1\big)} = \frac{\big(\sqrt{2}-1\big)R}{2-1} = \big(\sqrt{2}-1\big)R.$$

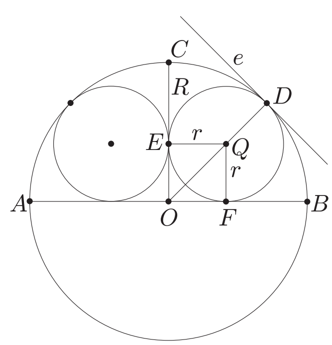
Tehát az r sugár hossza $\big(\sqrt{2}-1\big)R$.

II. megoldás. Legyen e az O középpontú, R sugarú és a Q középpontú, r sugarú körök közös érintője (*2. ábra*). Az érintési pontban húzott sugár merőleges az érintőre, emiatt a Q pont rajta van az OD szakaszon:

$$OD = OQ + QD = OQ + r = R.$$

$BOC\sphericalangle = 90^\circ$, valamint az OB és OC szakaszok is érintői az r sugarú körnek, így $OFQ\sphericalangle = OEQ\sphericalangle = 90^\circ$, és $EQ = FQ = r$, ezért az $OFQE$ négyszög négyzet. A Pitagorasz-tételt használva a négyzet átlója:

$$OQ = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}\,r.$$



2. ábra

Tehát

$$R = OQ + r = \sqrt{2}\,r + r = r \cdot \big(\sqrt{2}+1\big),$$

amiből

$$r = \frac{R}{\big(\sqrt{2}+1\big)} = \frac{R}{\big(\sqrt{2}+1\big)} \cdot \frac{\big(\sqrt{2}-1\big)}{\big(\sqrt{2}-1\big)} = \big(\sqrt{2}-1\big)R.$$