I. megoldás. Vizsgáljuk meg a két oldal 3-mal való lehetséges osztási maradékait.

A bal oldal: $n^3 - n - 1 = n\big(n^2 - 1\big) - 1 = (n-1)n(n+1) - 1$. Látható, hogy a kapott különbség első tagja mindig osztható 3-mal, hiszen 3 egymást követő egész szám szorzata. Ebből a szorzatból még kivonunk 1-et, tehát a bal oldal 3-mal osztva (minden n egészre) 2-t ad maradékul.

A jobb oldal: $k^2 - k + 1 = k(k-1) + 1$. Mivel k egész, az összeg első tagja csak $k = 3l + 2$ (ahol l egész) esetén lesz 3-mal nem osztható. Ha 3-mal osztható az első tag, akkor a jobb oldal 3-mal osztva 1-et ad maradékul, ami kizárja az egyenlőség lehetőségét a bal oldallal. A továbbiakban tehát csak $k = 3l + 2$ alakú számok esetén vizsgáljuk a jobb oldalt. Ekkor

$$k^2 - k + 1 = (3l+2)^2 - (3l+2) + 1 = 9l^2 + 9l + 3 = 3 \cdot \big(3l^2 + 3l + 1\big),$$

tehát a jobb oldal osztható 3-mal.

Vagyis beláttuk, hogy a bal oldal mindig 2-t, a jobb oldal pedig 1-et vagy 0-t ad osztási maradékul a 3-mal való osztásnál. Ezzel bebizonyítottuk, hogy nem léteznek olyan n és k egész számok, amelyekre teljesülne az egyenlet.

II. megoldás. Rendezzük át az egyenletet:

$$n^3 - n - 1 = k^2 - k + 1,$$
$$k^2 - k - n^3 + n + 2 = 0.$$

Tekintsük n-et paraméternek, ekkor az egyenlet k-ban másodfokú, és így $k_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{D}}{2}$, ahol

$$D = 1 - 4\big(-n^3 + n + 2\big) = 4n^3 - 4n - 7 = 4(n-1)n(n+1) - 9 + 2.$$

A k csak akkor lehet egész szám, ha D négyzetszám. A jobb oldali összeg első két tagja osztható 3-mal, így D-nek a 3-mal való osztási maradéka 2.

Ha egy szám $3p + 1$ alakú, akkor $(3p+1)^2 = 9p^2 + 6p + 1$; ha $3p + 2$ alakú, akkor $(3p+2)^2 = 9p^2 + 12p + 3 + 1$. Mindkét esetben a 3-mal való osztási maradék 1. Ez viszont azt jelenti, hogy D nem lehet négyzetszám, így k nem lehet egész szám, vagyis nem léteznek olyan n és k egész számok, amelyekre teljesülne az egyenlet.