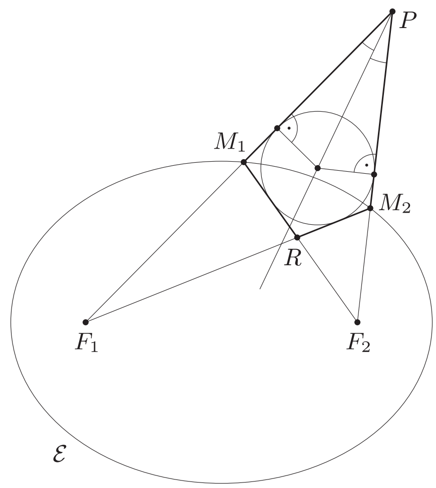
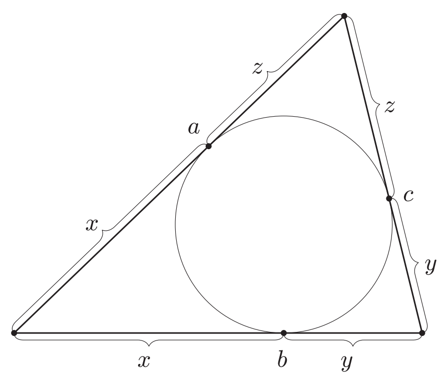
I. megoldás. Ha PM_1RM_2 érintőnégyszög, akkor a beírható köre egyúttal az F_1M_2P háromszögnek és az F_2M_1P háromszögnek is beírható köre. Vizsgáljuk meg, hogy e két háromszögben a beírható kör a P csúcstól milyen távolságra érinti a P-n átmenő oldalakat. Ha e két távolság egyenlő, akkor a két kör egybeesik, mert az F_1PF_2 szög szárait a szög csúcsától adott távolságra érintő kör egyértelműen létezik, középpontja a szög száraira az adott távolságban állított merőlegesek metszéspontja, sugara pedig e metszéspontnak a száraktól való távolsága (*1. ábra*).



1. ábra

Ismert, hogy ha egy háromszög oldalai a, b és c, akkor a beírt kör oldalakon lévő érintési pontjainak a csúcsoktól való távolsága rendre $(a+b-c)/2$, $(b+c-a)/2$ és $(c+a-b)/2$. (Ennek bizonyítását a *2. ábra* alapján az olvasóra bízzuk, csak annyit kell felhasználni, hogy külső pontból egy körhöz húzott két érintő hossza megegyezik.)



2. ábra

Az F_1M_2P háromszög beírt köre tehát P-től $\dfrac{PF_1+PM_2-F_1M_2}{2}$, az F_2M_1P háromszög beírt köre pedig P-től $\dfrac{PF_2+PM_1-F_2M_1}{2}$ távolságra érinti az F_1PF_2 szög szárait. Megmutatjuk, hogy e két távolság egyenlő. Ehhez elegendő azt belátnunk, hogy

$$PF_1+PM_2-F_1M_2=PF_2+PM_1-F_2M_1,$$

azaz

$$(PM_1+M_1F_1)+PM_2-F_1M_2=(PM_2+M_2F_2)+PM_1-F_2M_1$$

teljesül. Ezt rendezve kapjuk, hogy elegendő megmutatnunk az

$$M_1F_1+F_2M_1=M_2F_2+F_1M_2$$

egyenlőség fennállását, ami viszont azonnal következik abból, hogy M_1 és M_2 rajta vannak az F_1 és F_2 fókuszú $\mathcal{E}$ ellipszisen.

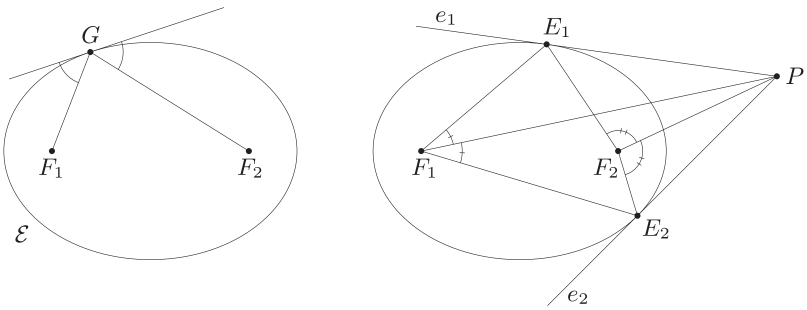
Tehát az F_1M_2P és az F_2M_1P háromszögek beírható körei egybeesnek, így ez a kör érinti a PM_1RM_2 négyszög minden oldalát, ezért PM_1RM_2 érintőnégyszög.

II. megoldás. A megoldás során felhasználjuk a kúpszeletek két tulajdonságát. A következő két lemma bizonyítása megtalálható pl. lapunk egy korábbi cikkében (*Kiss Gy.: Amit jó tudni a kúpszeletekről,* I. és II. rész, KöMaL 54. évf. (2004), 450–459[1] és 514–519[2]; 8, illetve 11. tétel).

[1] `http://www.komal.hu/cikkek/2004-11/kupszeletek1.h.shtml`.
[2] `http://www.komal.hu/cikkek/2004-12/kupszeletek2.h.shtml`.

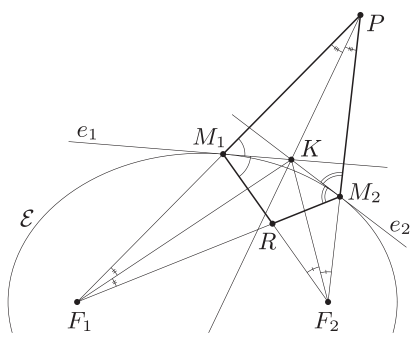
1. lemma. *A $\mathcal{K}$ kúpszelet tetszőleges G pontjában az érintő felezi a G-hez tartozó vezérsugarak szögét* (3. ábra).

2. lemma. *Ha egy külső P pontból érintőket húzunk a kúpszelethez, akkor a P-t az érintési pontokkal összekötő szakaszok a kúpszelet fókuszából vagy egyenlő, vagy pedig egymást* $180°$*-ra kiegészítő szögekben látszanak. Az utóbbi eset csak hiperbolánál fordul elő* (3. ábra).



3. ábra

Legyen $i = 1, 2$ esetén $\mathcal{E}$ érintője az M_i pontban e_i, a két érintő metszéspontja pedig K (*4. ábra*). Ekkor az 1. lemma szerint e_1 felezi a $PM_1F_2\sphericalangle$-et, e_2 pedig a $PM_2F_1\sphericalangle$-et, mert az $\mathcal{E}$-n lévő M_i ponthoz tartozó vezérsugarak F_1M_i és F_2M_i. A 2. lemmából pedig $M_1F_2K\sphericalangle = M_2F_2K\sphericalangle$, valamint $M_1F_1K\sphericalangle = M_2F_1K\sphericalangle$ következik, mert a K pontból $\mathcal{E}$-hez húzott KM_1 és KM_2 érintőszakaszok $\mathcal{E}$ fókuszaiból egyenlő szögekben látszanak. Tehát a PM_1F_2 háromszögben KM_1 és KF_2 belső szögfelezők, ezért a háromszög beírható körének középpontja K. Bármely háromszögben a szögfelezők egy ponton mennek át, ezért KP felezi az $F_1PF_2\sphericalangle$-et. Ugyanígy kapjuk, hogy a PM_2F_1 háromszög beírható körének középpontja is K, a $PM_2F_1\sphericalangle$-et felezi M_2K.



4. ábra

A K pont tehát a PM_1RM_2 négyszög M_1, M_2 és P csúcsából induló belső szögfelezőjén is rajta van, ezért a négyszög mind a négy oldalegyenesétől való távolsága ugyanaz az r érték. A PM_1RM_2 négyszög nyilván konvex, ezért a K körül rajzolt r sugarú kör a négyszög mind a négy oldalszakaszát belső pontban érinti. Ezzel beláttuk, hogy PM_1RM_2 érintőnégyszög.