Megoldás. A feladat szövegében nem szerepelt, de nyilvánvalóan az x_i számok egyike sem lehet 0, továbbá az n és k pozitív egészek. Azt fogjuk belátni, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesülhet, ha $x_k^2 = k \cdot x_1^2$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, minden más esetben a bal oldal nagyobb, mint a jobb oldal. Ha a jobb oldal negatív, akkor a bal oldal a gyökjel miatt biztosan nagyobb, mint a jobb. Tehát feltehetjük, hogy a jobb oldal nemnegatív. Ekkor a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás, és az egyenlőtlenség iránya sem változik.

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^4 + k^2}{x_k^2}\right)^2 - n^2(n+1)^2 \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^4 - k^2}{x_k^2}\right)^2,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^4 + k^2}{x_k^2}\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^4 - k^2}{x_k^2}\right)^2 \geq n^2(n+1)^2.$$

Alkalmazva az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosságot a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő alakba írható:

$$\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^4 + k^2}{x_k^2}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^4 - k^2}{x_k^2}\right)\right] \cdot \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^4 + k^2}{x_k^2}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^4 - k^2}{x_k^2}\right)\right] \geq$$
$$\geq n^2(n+1)^2.$$

Az összevonások után:

$$\left[2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\right] \cdot \left[2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{x_k^2}\right)\right] \geq n^2(n+1)^2.$$

Most 4-gyel osztva és részletesen felírva az összegeket

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{4}{x_2^2} + \ldots + \frac{n^2}{x_n^2}\right) \geq \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

Ez pedig a Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenség négyzetre emelt alakja a következő két sorozatra:

$$\overrightarrow{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \overrightarrow{b}\left(\frac{1}{x_1}, \frac{2}{x_2}, \ldots, \frac{n}{x_n}\right).$$

Egyenlőség itt akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\frac{x_1}{\frac{1}{x_1}} = \frac{x_2}{\frac{2}{x_2}} = \ldots \frac{x_n}{\frac{n}{x_n}}, \qquad x_1^2 = \frac{x_2^2}{2} = \ldots = \frac{x_n^2}{n}.$$