Megoldás. A Legendre-formula szerint $m!$ prímtényezős felbontásában a p prímszám kitevője

$$\sum_{i=1}^{M} \left[\frac{m}{p^i}\right],$$

ahol M a legnagyobb olyan egész, amelyre $p^M \le m$. Ebből következik, hogy $\binom{n}{k}$ prímtényezős felbontásában a p prímszám kitevője

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\left[\frac{n}{p^i}\right] - \left[\frac{k}{p^i}\right] - \left[\frac{n-k}{p^i}\right] \right),$$

ahol N a legnagyobb olyan egész szám, amelyre még $p^N \le n$. Mivel minden x, y valós számra fennáll az $[x+y]-[x]-[y] \le 1$ egyenlőtlenség, ebben az összegben minden tag értéke legfeljebb 1, vagyis $\binom{n}{k}$ prímtényezős felbontásában p kitevője legfeljebb N. Mivel $p^N \le n$, az $\binom{n}{k}$ minden prímhatvány osztója legfeljebb n. Így $\binom{n}{k}$ csak akkor lehet prímhatvány, ha $k = 1$ vagy $k = n-1$, és $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ prímhatvány, hiszen $1 < k < n-1$ esetén $\binom{n}{k} > n$, ha pedig $k = n$, akkor $\binom{n}{k} = 1$.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\binom{n}{k}$ pontosan akkor prímhatvány, ha n prímhatvány és $k = 1$ vagy $k = n - 1$.

Megjegyzések. 1. Sylvester és Schur egy nevezetes tétele szerint, ha $2k \le n$, akkor az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatónak van k-nál nagyobb prímosztója. Ha $\binom{n}{k} = p^\alpha$ prímhatvány, akkor ez a prímosztó csak p lehet, és mivel a $n(n-1)\dots(n-k+1)$ szorzatnak pontosan egy tagját osztja, ezért $\binom{n}{k} = p^\alpha \le n$ azonnal adódik.

2. A feladat egy lehetséges általánosítása, ha azt vizsgáljuk, hogy az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható mikor lehet teljes hatvány. Erről a problémáról Győry Kálmán: *Binomiális együtthatók és teljes hatványok*[1] című cikkében olvashatunk, ami a KöMaL 1999/1. számában jelent meg.

[1] `http://www.komal.hu/cikkek/gyory/binom/binom.h.shtml`.