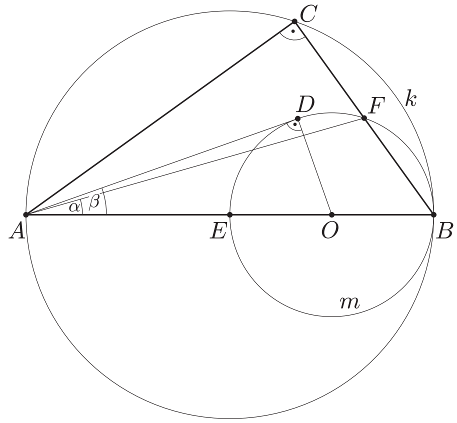
I. megoldás. Legyen az ABC derékszögű háromszög AB átfogójának felezőpontja E, BC befogójának felezőpontja F, a befogóhoz tartozó súlyvonalnak és az AB átfogónak a szöge α, az AB átfogó Thalész-köre k, ennek a B középpontú, $1/2$ arányú középpontos hasonlóságnál kapott képe pedig az m kör. Ekkor m az EB szakasz Thalész-köre, középpontja az AB szakasz B-hez legközelebbi O negyedelőpontja (*1. ábra*).

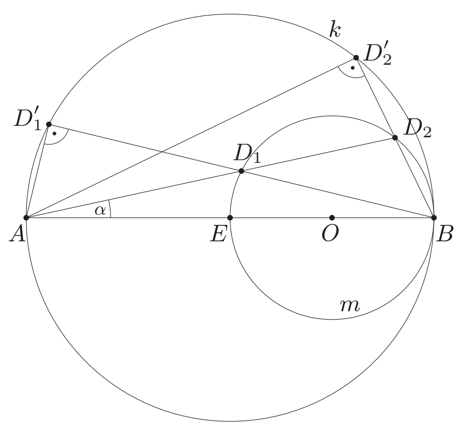


1. ábra

Az F pont felezi BC-t és C rajta van k-n, ezért F rajta van m-en, tehát az AF egyenesnek és m-nek van közös pontja. Így α legfeljebb akkora, mint az A-ból m-hez húzott AD érintő és AB által bezárt β szög. Ezt a szöget az AOD derékszögű háromszögből határozhatjuk meg.

$$\sin\beta = \frac{OD}{OA} = \frac{\frac{1}{4}AB}{\frac{3}{4}AB} = \frac{1}{3}, \quad \text{azaz} \quad \beta = \arcsin\frac{1}{3} \approx 19{,}47^\circ.$$

Megmutatjuk, hogy minden $0^\circ < \alpha \le \arcsin\dfrac{1}{3}$ esetén van olyan derékszögű háromszög, melyben az átfogó és az egyik befogóhoz tartozó súlyvonal szöge α. Ha a feltétel teljesül, akkor az AB egyenes egyik oldalára felmérve az α szöget, annak AB-tól különböző szára metszi m-et a D_1 és D_2 pontokban, illetve érinti m-et D-ben, ha $\alpha = \arcsin\dfrac{1}{3}$ (*2. ábra*). Mivel D_i rajta van m-en, azért ha B-ből kétszeresére nagyítjuk, akkor a kapott D_i' pont rajta lesz m kétszeresre nagyított képén, k-n, azaz az AB szakasz Thalész-körén. Ezért ha $i = 1, 2$, akkor az ABD_i' háromszög derékszögű, és a BD_i' befogójához tartozó AD_i súlyvonala α szöget zár be az átfogójával.



2. ábra

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, legyen továbbá $AB = 2$, $BC = 2a$, $AC = 2b$ és $AF = s$. Az ABC és AFC háromszögek derékszögűek, ezért Pitagorasz tétele szerint $4 = 4a^2 + 4b^2$, illetve $s^2 = a^2 + 4b^2$, amikből kapjuk, hogy

$$s^2 = 1 + 3b^2, \quad \text{s így} \quad s = \sqrt{1+3b^2}, \quad \text{valamint} \quad s^2 - a^2 = 4b^2. \tag{1}$$

Az α szög koszinuszát az ABF háromszög BF oldalára felírt koszinusztételből kifejezve, majd (1)-et felhasználva kapjuk, hogy

$$\cos\alpha = \frac{AB^2 + AF^2 - BF^2}{2\cdot AB\cdot AF} = \frac{4 + s^2 - a^2}{4s} = \frac{1+b^2}{\sqrt{1+3b^2}}.$$

A 2 átfogójú ABC derékszögű háromszög befogója $2b$, ezért b tetszőleges 0 és 1 közti értéket felvehet, így feladatunkat visszavezettük a $(0;1)$ intervallumon értelmezett

$$f(b)=\frac{1+b^2}{\sqrt{1+3b^2}}$$

függvény értékkészletének meghatározására. Az f függvényt ugyanezzel a képlettel definiálhatjuk az összes valós számon. Az így kiterjesztett függvény nyilván folytonos az egész számegyenesen, és ezért

$$\lim_{b\to 0} f(b)=f(0)=1, \quad \text{valamint} \quad \lim_{b\to 1} f(b)=f(1)=1$$

teljesül. A függvénynek a $(0;1)$ intervallumon lévő minimumát kisebb átalakítás után a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget felhasználva határozzuk meg.

$$\frac{1+b^2}{\sqrt{1+3b^2}}=\frac{\frac{1}{3}(1+3b^2)+\frac{2}{3}}{\sqrt{1+3b^2}}=\frac{\sqrt{1+3b^2}}{3}+\frac{2}{3\sqrt{1+3b^2}}\geq$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{1+3b^2}}{3}\cdot\frac{2}{3\sqrt{1+3b^2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

A függvény a $(0;1)$ intervallumon csak 1-nél kisebb értékeket vesz fel, mert ha $0<b<1$, akkor $b^4<b^2$ miatt $\left(1+b^2\right)^2=1+2b^2+b^4<1+3b^2$, tehát $1+b^2<\sqrt{1+3b^2}$, és ezért $f(b)<1$. Így a $(0;1)$ intervallumon értelmezett f függvény értékkészlete a $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3},1\right)$ intervallum. Ezért α minden olyan hegyesszöget felvesz, amelyre $\frac{2\sqrt{2}}{3}\leq\cos\alpha<1$ teljesül.

Tehát egy derékszögű háromszög átfogója és az egyik befogóhoz tartozó súlyvonala által bezárt szög tetszőleges $0°$-nál nagyobb, de $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 19{,}47°$-nál nem nagyobb értéket felvehet.