

**Megoldás.** Azt fogjuk igazolni, hogy a legkisebb ilyen szám  $c = \frac{1}{n+1}$ . Először is, ha  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n+1}$ , akkor a lehetséges összegek  $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots, \frac{n}{n+1}$ , vagyis  $\frac{1}{n+1}$ -nél kisebb  $c$ -re nem teljesül az állítás. Most megmutatjuk, hogy  $c = \frac{1}{n+1}$ -re már teljesül. Legyenek tehát  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tetszőleges valós számok. Tekintsük az  $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$  összegeket ( $1 \leq i \leq n$ ). Ha ezek között van olyan, amelynek törtrésze legfeljebb  $\frac{1}{n+1}$ , vagy legalább  $\frac{n}{n+1}$ , akkor készen is vagyunk, hiszen egy ilyen összegnek a legközelebbi egésztől vett eltérése legfeljebb  $\frac{1}{n+1}$ . Ha pedig nincs köztük ilyen, akkor a skatulya-elv miatt az

$$\left[ \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1} \right], \left[ \frac{2}{n+1}, \frac{3}{n+1} \right], \dots, \left[ \frac{n-1}{n+1}, \frac{n}{n+1} \right]$$

intervallumok közül legalább az egyikbe két összeg is esik, mondjuk  $s_i$  és  $s_j$  (ahol  $i < j$ ). Ekkor viszont az  $s_j - s_i = a_{i+1} + \dots + a_j$  összeg legközelebbi egésztől vett távolsága legfeljebb  $\frac{1}{n+1}$ . Ezzel igazoltuk a feladat állítását.