Megoldás. Megmutatjuk, hogy biztosan létezik ilyen n. Ha $n = 1$ és $n = 2$ közül egyik sem megfelelő, akkor $\alpha - \beta$ és $\alpha^2 - \beta^2$ egész számok. Mivel $\alpha - \beta \neq 0$, ezért $\alpha + \beta = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$ racionális szám, és így az

$$\alpha = \frac{(\alpha+\beta) + (\alpha-\beta)}{2} \quad \text{és a} \quad \beta = \frac{(\alpha+\beta) - (\alpha-\beta)}{2}$$

számok is racionálisak. Mivel α és β különbsége egész, ezért egyszerűsítés utáni alakjukban a nevező ugyanaz: legyen $\alpha = \dfrac{a}{c}$ és $\beta = \dfrac{b}{c}$, ahol a, b, c olyan egész számok, amelyekre $(ab, c) = 1$. Az $\alpha^n - \beta^n$ szám pontosan akkor egész, ha c^n osztja az

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$$

számot. Az $n = 1$ esetből $c \mid a - b$ adódik, vagyis a és b azonos maradékot adnak c-vel osztva. Mivel α és β közül legalább az egyik nem egész, ezért $|c| \neq 1$, vagyis a c egész számnak létezik p prímosztója. Mivel $c \mid a - b$, ezért $a \equiv b\ (p)$, és így

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1} \equiv na^{n-1}\ (p).$$

Mivel $(ab, c) = 1$, ezért $p \nmid a$. Így, ha az n szám nem osztható p-vel, akkor abból, hogy $c^n \mid a^n - b^n$ az is következik, hogy $p^n \mid a - b$-nek is teljesülnie kell, hiszen az $a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}$ összegnek nem osztója p. Elég tehát mutatni egy olyan n pozitív egész számot, amelyre $p \nmid n$ és $p^n \nmid a - b$. Mivel $a - b$ egy 0-tól különböző egész szám, ezért ilyen n nyilvánvalóan létezik: például $n = p|a - b| + 1$ megfelelő. (Ugyanis ezzel a választással $|a - b| < n < p^n$, így mindkét feltétel teljesülése könnyen ellenőrizhető.) Vagyis biztosan létezik olyan n, amelyre $\alpha^n - \beta^n$ nem egész.