Megoldás. Legyen az AC szakasz felezőpontja F_{AC}, a BD szakaszé F_{BD}. A paralelogramma-tétel miatt:

$$2PA^2 + 2PC^2 = AC^2 + 4PF_{AC}^2,$$
$$2PB^2 + 2PD^2 = BD^2 + 4PF_{BD}^2.$$

A feladatban szereplő egyenlőség tehát pontosan akkor teljesül, ha

$$AC^2 + 4PF_{AC}^2 = BD^2 + 4PF_{BD}^2,$$
$$AC^2 - BD^2 = 4PF_{BD}^2 - 4PF_{AC}^2,$$
$$PF_{BD}^2 - PF_{AC}^2 = \frac{AC^2 - BD^2}{4}.$$

Az $\frac{AC^2 - BD^2}{4}$ konstans, jelöljük c-vel. Helyezzük el az F_{AC} és F_{BD} pontokat egy koordináta-rendszerbe, $F_{AC}(0,0,0)$ és $F_{BD}(a,0,0)$. Legyenek P koordinátái (x,y,z). Ekkor $PF_{AC}^2 = x^2 + y^2 + z^2$ és $PF_{BD}^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2$. Az egyenletünk:

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c,$$
$$-2ax + a^2 = c,$$
$$x = \frac{a^2 - c}{2a}.$$

Ez egy síknak az egyenlete, amely merőleges az x tengelyre, vagyis az $F_{AC}F_{BD}$ egyenesre. Az $ABCD$ tetraéder körülírt gömbjének középpontján nyilván átmegy, mert itt $PA = PB = PC = PD$, tehát a feltétel triviálisan igaz. Így a feladatban szereplő mértani hely a tetraéder köréírt gömbjének középpontján átmenő, az $F_{AC}F_{BD}$ egyenesre merőleges sík.