Megoldás. $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$, így az egyenlet a következő alakba írható:

$$2012^{2015} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2}.$$

Rendezve:

$$\begin{aligned}
2 \cdot 2012^{2015} &= n(n-1) + k(k-1), \\
2 \cdot 2012^{2015} &= n^2 - n + k^2 - k, \\
8 \cdot 2012^{2015} &= 4n^2 - 4n + 4k^2 - 4k, \\
8 \cdot 2012^{2015} + 2 &= 4n^2 - 4n + 1 + 4k^2 - 4k + 1, \\
8 \cdot 2012^{2015} + 2 &= (2n-1)^2 + (2k-1)^2.
\end{aligned}$$

Az egyenlet jobb oldalán két négyzetszám összege áll. Azt fogjuk belátni, hogy az egyenlet bal oldala, vagyis $8 \cdot 2012^{2015} + 2$ nem írható fel két négyzetszám összegeként.

Vizsgáljuk először az egyenlet két-két oldalának 7-tel való osztási maradékát.

A bal oldal 7-tel osztva ugyanazt a maradékot adja, mint $2012^{2015} + 2$. A 2012 7-tel osztva 3-at ad maradékul, így a bal oldal 7-es maradéka $3^{2015} + 2$. A 3-hatványok 7-es maradéka periodikus, minden hetedik 3-hatvány ugyanazt a maradékot adja, mivel $3^3 = 27$ maradéka 6, azaz -1, így $3^6 = \left(3^3\right)^2$ maradéka $(-1)^2 = 1$. Ebből következik, hogy 3^{2015}-nek a 7-es maradéka ugyanannyi, mint 3^5-é, ami pedig 5, így $3^5 + 2$ osztható 7-tel, tehát az egyenlet bal oldala osztható 7-tel.

Az egyenlet jobb oldalán két (páratlan) szám négyzetösszege áll. A négyzetszámok 7-es maradéka ugyanaz, mint a 0^2, $(\pm1)^2$, $(\pm2)^2$, $(\pm3)^2$ számoké, ezért a $\{0; 1; 2; 4\}$ halmazból kerülhet ki. Az előbb beláttuk, hogy az egyenlet bal oldala osztható 7-tel, így a jobb oldalnak is oszthatónak kell lennie vele. A lehetséges maradékok összegeit megvizsgálva kiderül, hogy ez csak úgy történhet meg, ha mindkét négyzetszám osztható 7-tel. Ekkor viszont mindkettő osztható $7^2 = 49$-cel is, vagyis az egyenlet jobb oldala osztható 49-cel. Ezért a továbbiakban a bal oldal 49-es maradékát vizsgáljuk.

A 3-hatványok 49-es maradéka szintén periodikus: $3^4 = 81$ maradéka -17, így 3^5 maradéka $49 + 3(-17) = -2$, tehát $3^{20} = \left(3^5\right)^4$ maradéka $(-2)^4 = 16$, ezért 3^{21} maradéka $3 \cdot 16 = 48$, vagyis -1; ebből következik, hogy 3^{42} maradéka a 49-cel történő maradékos osztásnál $(-1)^2 = 1$. (Ugyanezt az Euler–Fermat-tételből is megkaphattuk volna.)

Mivel $2012 = 49 \cdot 41 + 3$ és $2015 = 42 \cdot 47 + 41$, a 2012^{2015}-nek a 49-es maradéka egyenlő 3^{41} maradékával; jelöljük ezt x-szel. Mivel $3^{42} = 3 \cdot 3^{41}$ a 49-cel osztva 1-et, azaz -48-at ad maradékul, $3x + 48 = 3(x + 16)$ osztható 49-cel. Így $x + 16$ is osztható 49-cel, tehát 3^{41} maradéka $x = 33$. Ezért a bal oldalnak, $8 \cdot 2012^{2015} + 2$-nek a 49-es maradéka $8 \cdot 33 + 2 = 266$-nek a 49-es maradéka, ami 21, így nem osztható 49-cel.

Azt kaptuk, hogy az egyenlet bal oldala nem osztható 49-cel, de a jobb oldala igen. Ellentmondásra jutottunk, tehát az egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számpárok körében.

Megjegyzések. 1. Az Euler–Fermat-tétel a következőt állítja: Ha m pozitív egész, és az m-mel való osztási maradékok között az m-hez relatív prímek száma $\varphi(m)$, akkor minden, az m-hez relatív prím a egész számra $a^{\varphi(m)}$-nek az m-mel való osztási maradéka 1 (azaz $a^{\varphi(m)} - 1$ osztható m-mel). A feladat fenti megoldásában $\varphi(49) = 42$ szerepelt.

2. Ha egy $4k + 3$ alakú pozitív p prímszám osztója két négyzetszám összegének, akkor a két négyzetszámnak külön-külön is osztója; tehát ekkor a két négyzetszám összege p^2-nel is osztható. (A megoldásban ennek $p = 7$ esete szerepelt.) Több is igaz: egy pozitív egész pontosan akkor írható föl két (nemnegatív) négyzetszám összegeként, ha prímtényezős alakjában minden $4k + 3$ alakú pozitív prímszám páros kitevőn szerepel.