I. megoldás. Legyen

$$S_m = \sum_{j=0}^{[m/2]} \binom{m}{2j}(-3)^j.$$

Azt állítjuk, hogy S_{2n} értéke 2^{2n}, ha n osztható 3-mal, és -2^{2n-1} különben. Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n = 1, 2, 3$ esetekben könnyen ellenőrizhető, hogy valóban teljesül:

$$S_2 = 1 - 3 \cdot 1 = -2, \quad S_4 = 1 - 3 \cdot 6 + 9 \cdot 1 = -8, \quad S_6 = 1 - 3 \cdot 15 + 9 \cdot 15 - 27 \cdot 1 = 64.$$

Az indukcióhoz elég megmutatni, hogy $m > 3$ esetén $S_m = (-8)S_{m-3}$, hiszen ebből $S_{2n} = (-8)S_{2n-3} = 64S_{2(n-3)}$, amiből már azonnal következik az állítás. Az $S_m = (-8)S_{m-3}$ összefüggés igazolásához először az $\binom{m}{2k}$ binomiális együtthatót írjuk fel a Pascal-háromszög $(m-3)$-adik sorában lévő binomiális együtthatók összegeként:

$$\binom{m}{2j} = \binom{m-1}{2j-1} + \binom{m-1}{2j} = \binom{m-2}{2j-2} + 2\binom{m-2}{2j-1} + \binom{m-2}{2j} =$$
$$= \binom{m-3}{2j-3} + 3\binom{m-3}{2j-2} + 3\binom{m-3}{2j-1} + \binom{m-3}{2j},$$

ahol az $\binom{a}{b}$ kifejezés értékét $b < 0$ és $a < b$ esetén is 0-nak tekintjük. Ezt felhasználva

$$S_m = \sum_{j=0}^{[m/2]} \left(\binom{m-3}{2j-3} + 3\binom{m-3}{2j-2} + 3\binom{m-3}{2j-1} + \binom{m-3}{2j}\right)(-3)^j.$$

Számoljuk meg, hogy ebben az összegben mi lesz $\binom{m-3}{\ell}$ együtthatója, ha $0 \le \ell \le m-3$. Ha $\ell = 2k+1$ páratlan szám, akkor a kérdéses együttható

$$1 \cdot (-3)^{k+2} + 3 \cdot (-3)^{k+1} = 0,$$

ha pedig $\ell = 2k$ páros, akkor

$$3 \cdot (-3)^{k+1} + 1 \cdot (-3)^k = -8 \cdot (-3)^k.$$

Azaz

$$S_m = \sum_{k=0}^{[(m-3)/2]} \binom{m-3}{2k}(-8)(-3)^k = -8S_{m-3}.$$

Ezzel igazoltuk, hogy a kérdezett összeg értéke 3-mal osztható n esetén 2^{2n}, 3-mal nem osztható n esetén pedig -2^{2n-1}.

II. megoldás. Tekintsük a

$$z = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)$$

alakú komplex számot és határozzuk meg a $2n$-edik hatványát (ahol n pozitív egész szám). A szám trigonometrikus alakjából a De Moivre-képletet alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$z^{2n} = 2^{2n}\left(\cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(n \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Másrészről, az algebrai alakból a binomiális tételt használva:

$$z^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} \cdot 1^{2n-j} \cdot \left(\sqrt{3}i\right)^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2j}(-3)^j + i\sqrt{3}\sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n}{2j+1}(-3)^j.$$

A z^{2n} szám kétféle felírásában a valós részeket összehasonlítva

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2j}(-3)^j = 2^{2n} \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2\pi}{3}\right)$$

adódik.