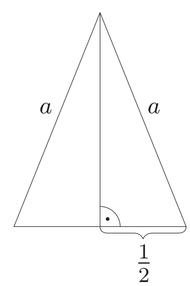
Megoldás. A tetraédernek négy csúcsa van, ezért bármely síkon lévő merőleges vetülete vagy háromszög, vagy konvex négyszög.

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor a vetület háromszög. E háromszög csúcsai a tetraéder három csúcsának vetületei, a tetraéder negyedik csúcsának vetülete pedig a háromszögbe esik. Tehát a vetület területe megegyezik az egyik lap vetületének területével. Ismert, hogy ha egy T területű sokszöget a síkjával α szöget bezáró síkra vetítünk és a vetület területe T_v, akkor $T_v = T\cos\alpha$ (ennek bizonyítása megtalálható pl. Hajós György: *Bevezetés a geometriába,* 36.7. tétel).

Tetraéderünknek kétfajta lapja van. Az egységnyi oldalú szabályos háromszög, ennek területe $\frac{\sqrt{3}}{4}$, valamint az olyan egyenlőszárú háromszög, amelynek alapja 1, szárai pedig a hosszúak. Az ilyen háromszög alaphoz tartozó magassága Pitagorasz tételéből következően $\sqrt{a^2-1/4}$ (*1. ábra*), ezért területe $\frac{\sqrt{a^2-1/4}}{2}$. Mivel $\cos\alpha \le 1$, a tetraéder vetületének t területére

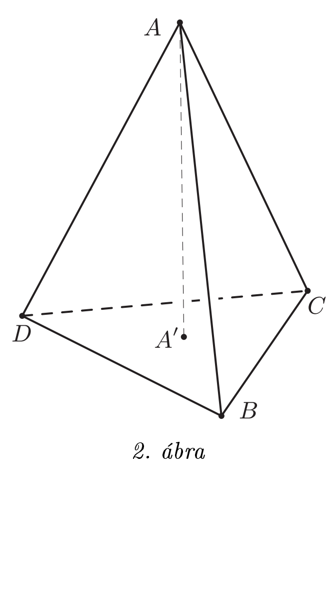
$$t \le \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \text{illetve} \quad t \le \frac{\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}}{2} \tag{1}$$

teljesül.

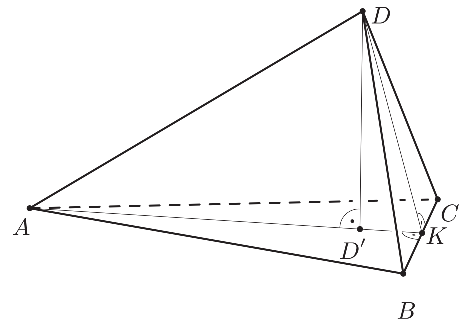


1. ábra

A tetraéder szabályos háromszöglapjának síkjára vetítünk, akkor e lap vetülete önmaga, a negyedik csúcs vetülete pedig a tetraéder szimmetriája miatt e lap középpontjába esik (*2. ábra*), tehát ebben az esetben a vetület területe $t = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Ha pedig a csúcsok betűzését úgy választjuk, hogy $AB = AC = AD = a$ és $BC = CD = DB = 1$ teljesül és az ABC lap síkjára vetítünk, akkor megmutatjuk, hogy a negyedik csúcs vetülete e lap belső pontja lesz, s így a vetület területe $t = \frac{\sqrt{a^2-1/4}}{2}$ (*3. ábra*). Mivel A is és D is egyenlő távolságra van B-től és C-től, ezért a BC szakasz felezőmerőleges síkjában A is és D is benne van, tehát $AD \perp BC$. Ezért ha a BC él felezőpontja K, akkor az AKD sík merőleges az ABC síkra. Vagyis D-nek az ABC síkon lévő vetülete megegyezik az AKD háromszög D-ből induló magasságának talppontjával. Ez pedig az AK szakasz belső pontja, ugyanis a háromszög oldalainak hossza $AD = a$, $AK = \sqrt{a^2-1/4}$ és $KD = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát leghosszabb (AD) oldalának négyzete kisebb, mint a másik két oldal négyzetének összege, vagyis AKD hegyesszögű háromszög.



2. ábra



3. ábra

Ha a vetület konvex négyszög, akkor annak mind a négy csúcsa a tetraéder egy-egy csúcsának a vetülete, a négyszög e és f hosszú átlói pedig a tetraéder két kitérő élének vetületei. Sem a három darab 1 hosszú, sem a három darab a hosszú tetraéderélek közt nincsenek kitérőek, ezért feltehetjük, hogy az e hosszúságú átló valamely 1 hosszú, az f hosszúságú átló pedig valamely a hosszú tetraéderél vetülete. Merőleges vetítésnél bármely szakasz képének hossza legfeljebb akkora, mint az eredeti szakasz hossza, ezért $e \le 1$ és $f \le a$. Ismert, hogy ha egy konvex négyszög átlóinak hossza e és f, az átlók szöge pedig φ, akkor a négyszög területe $(ef \sin\varphi)/2$. Tehát ebben az esetben a tetraéder vetületének t területére

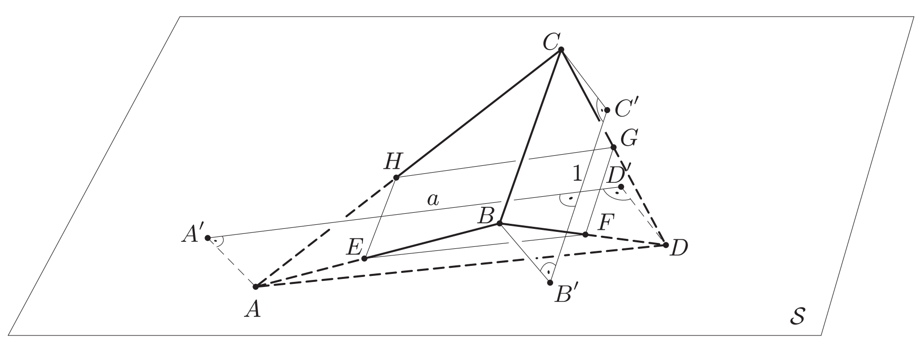
$$t \le \frac{ef \sin\varphi}{2} \le \frac{ef}{2} \le \frac{a}{2} \tag{2}$$

teljesül.

Válasszuk a csúcsok betűzését ugyanúgy, mint az előző példában, legyen továbbá az AB, AC, DB és DC élek felezőpontja rendre E, H, F és G (*4. ábra*). Ekkor az ABD és ACD háromszögekben EF és GH az AD élhez, az ABC és BCD háromszögekben pedig HE és FG a BC élhez tartozó középvonalak. Ezért $EF \parallel AD \parallel GH$ és $HE \parallel BC \parallel FG$. Vagyis az E, F, G és H pontok egy $\mathcal{S}$ síkba esnek és paralelogrammát alkotnak. Továbbá a párhuzamosságok miatt az AD és BC egyenesek is párhuzamosak $\mathcal{S}$-sel. Mivel merőleges vetítésnél a vetítés irányára merőleges szakaszok hossza nem változik, ez azt jelenti, hogy az $ABCD$ tetraéder $\mathcal{S}$-en lévő merőleges vetülete egy olyan $A'B'C'D'$ négyszög, melyben $A'D' = AD = a$ és $B'C' = BC = 1$. Továbbá $AD \perp BC$ miatt $A'D' \perp B'C'$ is fennáll. Vagyis az $ABCD$ tetraéder $\mathcal{S}$ síkra eső merőleges vetületének t területére

$$t = \frac{a \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ}{2} = \frac{a}{2}$$

teljesül.



4. ábra

Most már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy a különböző értékei esetén az (1) és (2) egyenlőtlenségek közül melyik ad nagyobb felső korlátot a vetület területére. A feladatban leírt tetraéder nyilván pontosan akkor létezik, ha a nagyobb, mint az egységnyi oldalú szabályos háromszög köré írható kör sugara, azaz ha $\frac{\sqrt{3}}{3} < a$. A $\frac{\sqrt{a^2 - 1/4}}{2} \le \frac{a}{2}$ egyenlőtlenség triviálisan teljesül, ezért azt kell meghatároznunk, hogy $\frac{\sqrt{3}}{4} \le \frac{a}{2}$ mikor áll fenn. Ez pontosan akkor teljesül, ha $\frac{\sqrt{3}}{2} \le a$.

Tehát $\frac{\sqrt{3}}{3} < a \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ esetén a tetraéder bármely síkon lévő merőleges vetületének területe legfeljebb $\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \le a$ esetén pedig legfeljebb $\frac{a}{2}$ lehet.